ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Tópicos previos

Para tomar el curso de ecuaciones en derivadas parciales es importante la familiaridad del alumno con los conceptos que se detallan a continuación. Sugerimos repasar los temas indicados y presentamos una selección de problemas a modo de guía de estudio:

Álgebra Lineal

Producto interno, bases ortogonales, transformaciones lineales y matrices, transformaciones ortogonales, matrices ortogonales, transformaciones autoadjuntas.

Bibliografía

[1] Hoffman M. y Kunze R., "Algebra Lineal", Prentice Hall, (1973).
[2] Leon S., "Linear Algebra with applications", Prentice Hall, (2002).

1. En lo siguiente considerar que $x, y \in I\!R^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$ y $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ son el producto interno y la norma euclídea respectivamente. Demostrar:

   (a) $| x_i | \leq \|x\|$.

   (b) $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} | x_i |$.

   (c) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   (d) $| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\|$

2. Sean $\{a_1, ..., a_k\}$ un conjunto de generadores de un subespacio V de $I\!R^n$, y sea $x \in I\!R^n$ ortogonal a cada uno de estos vectores. Demostrar que $x \in V^\perp$.

3. Ortogonalizar la base $(1, 0, 0, 1)$, $(-1, 0, 2, 1)$, $(0, 1, 2, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$ en $I\!R^4$.

4. Calcular una base ortogonal para el subespacio 3-dimensional de $I\!R^4$ que consiste en las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

5. Una función lineal $L : I\!R^n \to I\!R^n$ se dice que **preserva norma** sii $\|L(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in I\!R^n$, y que **preserva producto interior** sii $L(x).L(y) = x.y$. Probar que :

   (a) L preserva norma sii preserva producto interior.

   (b) Si L preserva norma, es isomorfismo.

   (c) L preserva norma sii transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

6. Sean A una matriz real de $n \times n$, y x e y vectores (columna) en $I\!R^n$. Mostrar que $(Ax).y = x.(A^t y)$. Deducir que $(Ax).(Ay) = x.(A^t A y)$.

7. Una matriz real A de $n \times n$ se llama **ortogonal** sii $AA^t = I$ (es decir $A^{-1} = A^t$). Demostrar que son equivalentes:

   (a) L es una transformación lineal que preserva norma.

   (b) La matriz de L asociada a la base canónica de es ortogonal.

   (c) La matriz de L asociada a una base ortogonal es ortogonal.

8. Una función lineal $L : I\!R^n \to I\!R^n$ se dice autoadjunta sii $L(x).y = x.L(y)$. Probar que una transformación lineal es autoadjunta sii la matriz de L asociada a la base canónica es simétrica. Lo es la matriz asociada a cualquier base ortonormal ?

9. Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = (4, 4, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (4, -2, 4)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, -2, -2)$, sea $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ el operador lineal que transforma $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ respectivamente en $(10, -2, -2)$, $(-2, 10, -2)$ y $(1, 1, 5)$.

   (a) Hallar la matriz de T en la base canónica. Deducir que T es autoadjunto.

   (b) Hallar una base de autovectores de T, y su forma diagonal.

   El problema 9 (b) es un caso particular del

   Teorema espectral: *Para todo operador autoadjunto T definido en un espacio vectorial con producto interno, de dimensión finita, existe una base ortonormal de autovectores de T.*

Topología en $I\!R^n$

Conjuntos abiertos y cerrados, clausura, puntos de acumulación, frontera, sucesiones, completitud, series (incluso criterios de convergencia de series numéricas), conjuntos compactos y conexos. Funciones continuas, teorema del máximo y mínimo. Sucesiones de funciones, convergencia puntual y uniforme, series de funciones y de potencias. El espacio $C[a,b]$. Teorema de Arzelá.

Bibliografía

[1] Marsden J. y Hoffman M., "Análisis Clásico Elemental", Addison-Wesley Iberoamericana, (1998).

1. Sea $A \subset I\!R$ abierto y sea $B \subset I\!R^2$ definido por $B = \{(x, y) \in I\!R^2 /\ x \in A\}$. Demostrar que B es abierto.

2. Demostrar que:
   (a) $A_\varepsilon = \{x \in I\!R^n /\ d(x, A) < \varepsilon\}$ es abierto.
   (b) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   (c) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

3. Para los siguientes conjuntos determinar el conjunto de puntos de acumulación y la clausura:
   (a) $A = \{(x, y) \in I\!R^2 /\ y = 0,\ 0 < x < 1\}$.
   (b) $B = \{(x, y) \in I\!R^2 /\ x > y^2\}$.
   (c) $\{(m, n) /\ m, n \text{ enteros}\}$
   (d) $\{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) /\ m, n \text{ enteros},\ n \neq 0,\ m \neq 0\}$

   Utilizar el teorema de Heine Borel para indicar en que caso la clausura es compacta.

4. Demostrar que:
   (a) $cl(A) = A \bigcup \partial A$.
   (b) La frontera de un conjunto es cerrada.
   (c) $cl(A \bigcup B) = cl(A) \bigcup cl(B)$
   (d) $cl(A \bigcap B) \subset cl(A) \bigcap cl(B)$
   (e) $\partial A = \partial A^c$.
   (f) $\partial(A \bigcup B) \subset \partial(A) \bigcup \partial(B)$.

5. Demostrar que la unión y la intersección de una cantidad finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

6. Demostrar que la intersección de un conjunto compacto y conjunto cerrado es un conjunto compacto.

7. Determinar el límite de la sucesión $(\frac{(\sin n)^n}{n}, \frac{1}{n^2})$ en $\mathbb{R}^2$.

8. (a) Demostrar que toda sucesión en un espacio métrico convergente es acotada.
   (b) Demostrar que una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy sii es convergente.

9. (a) Probar que si $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces para cualquier $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0 \quad y_0 = \lim_{t \to 0} f(x_0 + tv)$.
   (b) Ver que la recíproca de la afirmación anterior es falsa. Considerar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \frac{(y^2 - x)^2}{x^2 + y^4}$ si $(x, y) \neq 0$. Ver que no existe $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ pero para cualquier $v \neq 0$, $\lim_{t \to 0} f(tv) = 1$.

10. Dados dos conjuntos C y D en $\mathbb{R}^n$, se define la distancia $d(C, D)$ entre ellos como el ínfimo entre el conjunto de los valores $\|a - b\|$ con $a \in C$ y $b \in D$. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y D un conjunto compacto.
    (a) Verificar que la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - a\|$ es continua.
    (b) Deducir que existe $d \in D$ tal que $d(a, D) = \|d - a\|$.
    (c) Demostrar el mismo resultado para D cerrado. Pista: Considerar una bola centrada en a conveniente y la misma función que para el caso anterior.

11. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable y supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que $| f'(x) | \leq M$ para todo x que satisfaga $a < x < b$ (a y b pueden ser $+\infty$ o $-\infty$). Demuestrese que f es uniformemente continua.

12. Una serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ con $x_i \in \mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si la sucesión de sumas parciales dada por $s_k = \sum_{i=0}^{k} x_i$ converge a x y escribimos $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = x$. Demostrar que una serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ en $\mathbb{R}^n$ converge sii $\forall \varepsilon > 0, \exists N :$ si $k \geq N$ entonces $\| x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{k+p} \| < \varepsilon$ para todo $p = 0, 1, 2, \ldots$. Deducir que en particular $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ converge entonces $x_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

13. Analizar la convergencia de las siguientes series:
    (a) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2-3n+1}$
    (b) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} sin(n^{-\alpha}),\ \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{sin^n n}{n^2}, \frac{1}{n^2})$

14. (a) Demostrar que la sucesión de funciones $f_k : I\!R \to I\!R$, $f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < k \\ 1 & \text{si} \quad x \geq k \end{cases}$, converge puntualmente pero no uniformemente.

    (b) Dar una sucesión de funciones de $C([0,1])$ que converja puntualmente, pero no uniformemente a una función continua.

15. Analizar la convergencia y la convergencia uniforme de las siguientes sucesiones:

    (a) $f(x) = (x - 1/n)^2, \ 0 \leq x \leq 1.$

    (b) $f(x) = x - x^n, \ 0 \leq x \leq 1.$

16. (a) Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:
    1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

    (b) Mostrar que $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, para $|x| < 1$. (Sug.: derivar una serie adecuada).

17. Sea $\{f_n\} \subset C([a,b])$, acotada en la norma del supremo ($\|f\|_\infty = sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$). Verificar que la sucesión de funciones definidas mediante

$$g_n(t) = \int_a^t f_n(s)ds,$$

tiene una subsucesión convergente. (Sugerencia: T. Arzelá).

Cálculo vectorial

Vector gradiente, divergencia y rotacional de un campo vectorial, teorema de Stokes, teorema de Gauss, campos conservativos.

Bibliografía

[1] Marsden J. y Tromba A., "Cálculo Vectorial", Addison-Wesley Iberoamericana, (1991).

Notación: Sea $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$ diferenciable en $(x_1, \dots, x_n)$. Con $\nabla f(x_1, \dots, x_n)$ denotaremos al vector gradiente de f en $(x_1, \dots, x_n)$ dado por:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

También nos referiremos con ∇f al campo vectorial gradiente $\nabla f : U \subset I\!R^n \to I\!R^n$ dado por la asignación $x \hookrightarrow \nabla f(x)$, $(x \in U \subset I\!R^n)$. Con $\frac{\partial f}{\partial \eta}(x)$ ó $D_\eta(x)$ denotaremos la derivada parcial de f en $x \in U \subset I\!R^n$ en la dirección del vector unitario $\eta \in I\!R^n$.
Dado un campo vectorial $F : A \subset I\!R^3 \to I\!R^3$, de clase C^1, $F = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, denotaremos con *rot* F ó $\nabla \times F$ al campo vectorial *rotacional* de F dado por:

$$rot\ F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{k},$$

y con *div* F ó $\nabla \cdot F$ a la *divergencia* del campo F, que será el campo escalar dado por:

$$div\ F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Si $\nabla \times F = 0$ en un punto P diremos que F es irrotacional en P y si $\nabla \cdot F = 0$ en P diremos que F es incompresible en P. Físicamente, si F representa el campo de velocidades de un gas (o fluido), $div\, F > 0$ (respectivamente $div\, F < 0$) en P, significa que el gas se expande (comprime) en P y consideraremos a P como una fuente (sumidero). Si $\nabla \times F = 0$ en P significa que el fluido no tiene rotaciones (o remolinos) en P. Una justificación de esta terminología se verá en los ejercicios 3 y 4.
Con ∇^2 denotaremos el operador de Laplace, que opera sobre funciones $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$ dado por:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Dada una curva suave a trozos simple y orientada C en $I\!R^n$ y F un campo vectorial continuo sobre la curva denotaremos con $\int_C F\, ds$ a la integral de línea de F a lo largo de C. Con $\int_S F\, dS$ ó $\int_S F \cdot n\, dS$ denotaremos a la integral de superficie de un campo F definido en la superficie orientada S.

Teorema de Stokes: *Sea S una superficie orientada y F un campo vectorial C^1 en S. Con ∂S denotamos la curva frontera de S orientada en forma tal que en su recorrido la superficie se encuentre a la izquierda. Entonces:*

$$\int_S rot\ F\ dS = \int_S (\nabla \times F)\ dS = \int_{\partial S} F\ ds.$$

Teorema de Gauss o de la divergencia: *Sea Ω una región (sólido) en $I\!R^3$ y sea $\partial\Omega$ la superficie cerrada que acota a Ω orientada en forma tal que la normal sea exterior. Sea F un campo vectorial C^1 definido en Ω, entonces:*

$$\int_\Omega div\ F\ dV = \int_\Omega \nabla \cdot\ F\ dV = \int_{\partial\Omega} F\ dS.$$

1. Sea $f : U \subset I\!R^n \to I\!R$ diferenciable y supongamos que $\nabla f(a) \neq 0$, para $a \in I\!R^n$.
   (a) $\nabla f(a)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.
   (b) $\nabla f(a)$ es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por a, (es decir que dado cualquier trayectoria diferenciable λ con imagen en la superficie de nivel tal que $\lambda(0) = a$ entonces $\nabla f(a)$ es perpendicular a $\lambda'(0)$, vector velocidad en el punto a).
   (c) Si e es un vector unitario entonces $D_e f(x) = \nabla F(x) \cdot e$.

2. (a) Demostrar que cualquier campo gradiente es irrotacional.
   (b) Demostrar que para cualquier campo F se verifica que

$$div\, rot\ F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

.

3. Sea F un campo de clase C^1 en $I\!R^3$.
   (a) Si $B(P, \varepsilon)$ la bola de centro P y radio ε, utilizar el teorema del valor medio para integrales para demostrar que existe $Q \in B(P, \varepsilon)$ tal que

$$\int_{\partial B(P,\varepsilon)} F\ dS = div\ F(Q).Vol(B(P, \varepsilon)).$$

   Deducir que

$$div\ F(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{Vol(B(P, \varepsilon))} \int_{\partial B(P,\varepsilon)} F\ dS. \qquad (1)$$

   Nota: Si $div\ F(P) > 0$ hay un flujo neto hacia el exterior cerca de P lo cual justifica el nombre de fuente para el punto P, y sumidero en caso contrario.

(b) Demostrar que F es incompresible en $\mathbb{R}^3$ sii $\int_S F\,dS = 0$ para toda superficie cerrada $\mathbb{R}^3$.

4. (a) Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas, donde D es un conjunto compacto y conexo y $g > 0$ en D, entonces existe $x_0 \in D$ tal que

$$\int_D f(x)g(x)\,dx = f(x_0)\int_D g(x)\,dx.$$

Pista: Considerar que $ng(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ siendo m y M el mínimo y el máximo de f en D y utilizar el teorema del valor intermedio para funciones continuas.

(b) Probar el teorema del valor medio para integrales de superficie: Si F es un campo vectorial continuo entonces:

$$\int_S F \cdot \nu\,dS = [F(Q)\cdot \nu(Q)]A(S),$$

para algún punto Q de S, donde $A(S)$ es el área de S.

(c) Sea V un campo C^1 en $\mathbb{R}^3$, $P \in \mathbb{R}^3$ y n un vector unitario. Sea S_ρ un disco plano con centro en P y radio ρ que es perpendicular a n. Considerar a ∂S_ρ con la orientación inducida por n. Demostrar que existe un punto Q en S_ρ tal que:

$$\int_{\partial S_\rho} V\,ds = [rot\,V(Q)\cdot n(Q)]A(S_\rho).$$

Deducir que:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{A(S_\rho)}\int_{\partial S_\rho} V\,ds = rot\,V(P)\cdot n(P).$$

(d) Demostrar que F es irrotacional en $\mathbb{R}^3$ sii $\int_C F\,ds = 0$ para toda curva simple cerrada en $\mathbb{R}^3$.

5. Sea Ω una región en $\mathbb{R}^3$, n el vector unitario normal exterior a $\partial\Omega$ y f y g funciones escalares de clase C^2. Usando el teorema de la divergencia para un campo apropiado probar las *identidades de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n}\,dS = \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\,dV + \int_\Omega f\nabla^2 g\,dV.$$

$$\int_\Omega (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \int_{\partial\Omega}\Big(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\Big)\,dS.$$

6. (a) Sea D una esfera en $\mathbb{R}^3$ y sea F el campo dado por $F(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces si $(0,0,0) \notin \partial D$ entonces $\int_{\partial D}\frac{F\cdot n}{r^3}dS = 0$ si $(0,0,0)\notin D$ y $\int_{\partial D}\frac{F\cdot n}{r^3}dS = 4\pi$ si $(0,0,0)\in D$, donde $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(b) Escribir el volumen de un dominio D como una integral sobre la frontera.

7. Sea F un campo vectorial C^1 definido en $I\!R^3$ excepto quizás en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (a) Para cualquier curva cerrada simple orientada C, $\int_C F\, ds = 0$.

   (b) Dadas dos curvas simples cerradas orientadas C_1 y C_2 con extremos iguales se tiene que
   $$\int_{C_1} F\, ds = \int_{C_2} F\, ds.$$

   (c) F es el gradiente de alguna función f (donde f no está definida en los puntos donde F no lo está).

   (d) $\nabla \times F = 0$

   (Sugerencia: Ver [1])

   Nota: Un campo que satisface una (y por tanto todas) las condiciones del resultado anterior se llama *campo vectorial conservativo o irrotacional.*