DISPENSE DEL CORSO DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

FRANCESCO MAGGI

Università degli Studi di Firenze
Corso di Laurea in Matematica

August 11, 2011

Contents

INTRODUZIONE

Il problema archetipo: Nel problema archetipo del Calcolo delle Variazioni, si considera un funzionale $F : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx\,,$$

definito su funzioni $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Qui Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una data funzione integranda. Assegnata una funzione $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, si formula il problema di Dirichlet per il funzionale F, minimizzandolo nella classe di competizione

$$\mathcal{A}(u_0) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\}\,,$$

si studia cioè il problema variazionale

$$m = \inf\{F(u) : u \in \mathcal{A}(u_0)\}\,. \tag{0.1}$$

Molti problemi di tipo geometrico o meccanico possono essere formulati come problemi variazionali di tipo Dirichlet. I due esempi fondamentali sono i seguenti:

Problema del grafico area minima. Corrisponde alla scelta

$$f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{0.2}$$

In questo modo,

$$F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,,$$

è uguale all'area del grafico della funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, e il problema (0.1) consiste nel cercare la superficie n-dimensionale di area minima rappresentabile come grafico di funzione sopra Ω e "passante" per u_0 sul bordo di Ω.

Problema della membrana elastica. Il grafico della funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ modellizza la posizione di una membrana elastica (che è a riposo se $u = 0$). In prima approssimazione, l'energia elastica incamerata nella posizione u è proporzionale al funzionale $F(u)$ corrispondente all'integrando

$$f(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{0.3}$$

i.e. si considera

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,.$$

Postulando che la membrana si disponga in modo da minimizzare la propria energia elastica, il problema (0.1) porta a determinare la posizione effettivamente assunta dalla membrana qualora essa sia forzata ad assumere la posizione u_0 sul bordo di Ω. Il funzionale $F(u)$ è spesso chiamato *energia di Dirichlet* di u.

Variazioni ed equazione di Eulero-Lagrange: Storicamente, il primo approccio a questo tipo di problemi è basato sulla seguente osservazione. In entrambi i casi considerati il funzionale F risulta convesso sullo spazio affine $\mathcal{A}(u_0)$, come riflesso della convessità della funzione integranda f. Nel caso di una funzione convessa su uno spazio affine finito dimensionale, la determinazione dei suoi punti di minimo si riduce a quella dei suoi punti critici. Si cerca dunque di dare un senso alla condizione di punto critico nel presente contesto infinito dimensionale, pervenendo allo studio di un'equazione alle derivate parziali, nota come *equazione di Eulero-Lagrange*.

Più precisamente, si assuma l'esistenza di un minimo $u \in \mathcal{A}(u_0)$ del problema (0.1). Per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta allora $u + t\varphi \in \mathcal{A}(u_0)$ e la funzione di variabile reale $t \mapsto F(u + t\varphi)$ ha un minimo in $t = 0$. Derivando formalmente in t, e imponendo l'annullarsi della derivata in $t = 0$ si trova quindi la condizione integrale

$$0 = \int_\Omega \nabla f(\nabla u(x)) \cdot \nabla\varphi(x) dx\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \tag{0.4}$$

Poichè $\varphi = 0$ su $\partial\Omega$, applicando il Teorema della Divergenza al campo vettoriale $T = \varphi\,(\nabla f \circ \nabla u) \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, si trova immediatamente

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div} T = \int_\Omega (\nabla f \circ \nabla u) \cdot \nabla\varphi + \varphi \operatorname{div}(\nabla f \circ \nabla u)\,,$$

che, combinata con (0.4) porta ad una nuova condizione integrale, i.e.

$$0 = \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\nabla f \circ \nabla u)\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Sfruttando l'arbitrarietà di φ e ricordando che $u \in \mathcal{A}(u_0)$, si riesce dunque a dimostrare - almeno formalmente - che un minimo u del problema variazionale (0.1) soddisfa un'equazione alle derivate parziali con condizioni al bordo di tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla f \circ \nabla u) = 0\,, & \text{in } \Omega, \\ u = u_0\,, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

nota come equazione di Eulero-Lagrange del problema (0.1). Consideriamo l'equazione di Eulero-Lagrange nei due esempi sopra citati.

Esempio 0.1. Nel caso delle superfici di area minima essa prende la forma

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{0.6}$$

Il membro di sinistra coincide con la curvatura media della superficie n-dimensionale determinata dal grafico di u nel punto $(x, u(x))$. Dunque l'equazione di Eulero-Lagrange ha un preciso significato geometrico: un grafico di area minima deve avere curvatura media nulla.

Esempio 0.2. Nel caso del problema della membrana elastica, l'equazione di Eulero-Lagrange è la familiare equazione delle funzioni armoniche

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{0.7}$$

Dunque, i minimi del problema della membrana elastica sono funzioni armoniche.

Dunque, in ipotesi di convessità di F, ogni eventuale minimo sarà soluzione di (0.5). Viceversa, in virtù della convessità di F, ogni soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange risulterà essere un minimo per il problema variazionale (0.1) (ammesso che un minimo esista, vedi poco sotto).

L'approccio classico pone dunque il fuoco sullo studio dell'equazione di Eulero-Lagrange (0.5). In alcuni interessanti esempi relativi al caso unidimensionale $n = 1$, e nelle poche situazioni in dimensione $n \geq 2$ che risultino riconducibili al caso unidimensionale in virtù di particolari simmetrie del problema considerato, questo approccio può portare all'identificazione esplicita del minimo. Tuttavia, anche in questi casi fortunati, il solo studio dell'equazione di Eulero-Lagrange, in assenza di un risultato di esistenza di minimi, non è troppo affidabile. Questa affermazione è bene illustrata dai due seguenti esempi.

"Paradosso" di Perron: Consideriamo il problema di massimo $\sup\{n : n \in \mathbb{N}\}$. Chiaramente un massimo non esiste: se n fosse il massimo, poichè vale sempre $n+1 \geq n$, allora dovremmo avere $n = n + 1$, i.e. $0 = 1$, contraddizione. Potremmo aver tuttavia ragionato come segue: se n fosse il massimo, poichè vale sempre $n^2 \geq n$, allora dovremmo avere $n^2 = n$, i.e. $n = 0$ o $n = 1$. Concludendo quindi che, se un massimo esiste, allora tale massimo è $n = 1$. Nel secondo ragionamento, formalmente corretto, assumendo l'esistenza del massimo abbiamo derivato "l'equazione di Eulero-Lagrange" $n^2 = n$. L'equazione è effettivamente una condizione necessaria di massimalità, e per di più può essere risolta esplicitamente. Tuttavia, le sue soluzioni, non sono chiaramente dei massimi del problema, che infatti (primo ragionamento) non esistono!

Funzioni armoniche con energia di Dirichlet infinita: Utilizzando una decomposizione in coordinate polari e le serie di Fourier non è difficile costruire una funzione $u \in C^\infty(B) \cap C^0(\overline{B})$ (B la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$) tale che risulti $\Delta u = 0$ in B e tale che

$$\int_B |\nabla v|^2 = +\infty\,,$$

per ogni $v \in C^\infty(B) \cap C^0(\overline{B})$ con $v = u$ su ∂B. In questo caso dunque u risolve l'equazione di Eulero-Lagrange, ma il problema variazionale è singolare

Metodo Diretto: Questo tipo di osservazione rende chiaro che per impostare correttamente un problema variazionale è necessario inanzitutto stabilire un risultato di esistenza di minimi "direttamente", cioè senza passare da eventuali condizioni necessarie di minimalità.

La necessità di costruire funzioni armoniche su domini Ω generali ha impresso, a partire dalla fine del diciannovesimo secolo, la spinta decisiva allo studio *diretto* dell'esistenza di minimi per problemi variazionali del tipo (0.1).

Il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni cerca di risolvere tale questione in analogia con il ben noto criterio di Weierstrass: una funzione $F : X \to \mathbb{R}$ su uno spazio metrico (X,d) ammette minimo su un compatto $K \subset X$ non appena essa risulti limitata inferiormente e d-semicontinua inferiormente su K. Infatti, sotto tali ipotesi,

$$m = \inf_K F \in \mathbb{R} .$$

Possiamo allora considerare una successione minimizzante, cioè una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset K$ tale che risulti

$$F(u_h) \to m .$$

Per compattezza di K esistono allora $u \in K$ e $h(k) \to \infty$ tali che $d(u_{h(k)}, u) \to 0$. Poichè $u \in K$ e poichè F è d-semicontinuo inferiormente abbiamo allora

$$m \le F(u) \le \liminf_{k\to\infty} F(u_{h(k)}) = \lim_{h\to\infty} F(u_h) = m .$$

Dunque $F(u) = m$, i.e. u è un minimo di F su K.

Proviamo ad applicare il Metodo Diretto per il problema della membrana elastica con condizione di tipo Dirichlet. Data una successione minimizzante $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ troveremo

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 : u \in C^1(\overline{\Omega}) \, , u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\} .$$

Avremo dunque due informazioni su una generica successione minimizzante: (1) $u_h = u_0$ su $\partial\Omega$ per ogni $h \in \mathbb{N}$; (2) $\{\nabla u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è equi-limitata in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Tuttavia, come semplici esempi dimostrano, queste due proprietà non sono in generale sufficienti a dedurre la convergenza di una sottosuccessione $u_{h(k)}$ verso una funzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Il Metodo Diretto forza l'estensione della classe di competizione a classi di funzioni più ampie di $C^1(\overline{\Omega})$, in cui sia possibile dimostrare opportune proprietà di compattezza per successioni soddisfacenti condizioni del tipo (1) e (2). Gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ forniscono una generalizzazione dello spazio $C^1(\overline{\Omega})$ in cui in molte situazioni di interesse è possibile applicare il Metodo Diretto al fine di dimostrare l'esistenza di minimi. Una volta provata l'esistenza di un minimo nella classe degli spazi di Sobolev, dovremo affrontare due questioni. La prima è, ovviamente, quella di individuare condizioni atte a garantire che l'aver allargato la classe di competizione da $C^1(\overline{\Omega})$ a $W^{1,p}(\Omega)$ non abbia diminuito *strettamente* il valore dell'estremo inferiore che stiamo studiando. Il secondo problema consiste nel verificare se il minimo trovato in $W^{1,p}(\Omega)$, proprio in virtù della sua minimalità, non goda in realtà di proprietà di differenziabilità classica in Ω.

Le dispense sono organizzate come segue. Nella sezione 1 verranno ricordati alcuni risultati preliminari di teoria della misura necessari allo studio delle funzioni di Sobolev. Nella sezione 2 introdurremo gli spazi di Sobolev e ne dimostreremo le proprietà utili all'applicazione del Metodo Diretto. Dimostreremo in particolare l'esistenza di minimi per problemi variazionali, e discuteremo la validità delle corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Nella sezione 3 approfondiremo lo studio degli spazi di Sobolev su aperti Ω sufficientemente regolari, dimostrando in particolare come in questo caso la minimizzazione in $W^{1,p}(\Omega)$ non faccia decrescere il valore dell'estremo inferiore ottenuto minimizzando in $C^1(\overline{\Omega})$. Infine nella sezione 4 dimostreremo che i minimi trovati nello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ risultano, sotto opportune ipotesi sull'integranda f, classicamente derivabili.

Lo studente potrà infine rivolgersi alla limitata lista di monografie presente in bibliografia per iniziare gli ulteriori ed opportuni approfondimenti di questi argomenti, qui semplicemente introdotti nella loro forma più semplice ed essenziale.

Ringraziamento: Un ringraziamento particolare va a Joaquim Serra Montolí per la lettura di una versione preliminare di queste note e per le varie correzioni proposte.

Uno studio soddisfacente dei problemi variazionali necessita indubbiamente di alcuni strumenti di teoria della misura, in particolare della teoria delle misure di Radon e del teorema di derivazione di misure di Besicovitch-Lebesgue. Il teorema dei punti di Lebesgue (che rappresenta un caso particolare di questo ultimo risultato) è tuttavia sufficiente ad introdurre l'utilizzo degli spazi di Sobolev nello studio dei problemi variazionali. In questa sezione forniamo pertanto una dimostrazione di questo risultato, basandoci su pochi risultati classici riguardanti la misura di Lebesgue e gli spazi L^p. Nel seguito il termine "misurabile" si riferisce sempre alla misura di Lebesgue.

Teorema 1.1 (Teorema dei punti di Lebesgue)**.** *Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $|E| = 0$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$,*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)| dy = 0 \,. \tag{1.1}$$

(Ogni $x \in \mathbb{R}^n$ in cui valga la (1.1) *viene detto punto di Lebesgue di u).*

Il seguente corollario del teorema dei punti di Lebesgue risulterà particolarmente utile nel seguito. E' solitamente denominato "lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni".

Corollario 1.2 (Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni)**.** *Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi = 0 \,,$$

per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Allora $u = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione del corollario: Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, possiamo sempre costruire una successione $\{\varphi_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ con $0 \le \varphi_h \le 1$ che converga in $L^1(\mathbb{R}^n)$ alla funzione $v = 1_{B_r(x)}$: basterà ad esempio considerare la successione di ε_h-regolarizzate di v associate ad una qualunque successione $\varepsilon_h \to 0^+$ (si veda il Teorema 1.5). Per ipotesi, $\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_h = 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, pertanto passando al limite $h \to \infty$ si troverà

$$0 = \int_{B_r(x)} u \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \,, r > 0 \,.$$

Se ora x è un punto di Lebesgue di u, da (1.1) troviamo che

$$u(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u = 0 \,.$$

□

La dimostrazione del teorema dei punti di Lebesgue è contenuta nella sezione 1.3. Ad essa premettiamo la discussione di due risultati preliminari, ma di notevole ed indipendente interesse, il teorema di ricoprimento di Vitali e il teorema massimale di Hardy-Littlewood. Infine nella sezione 1.4 utilizziamo il Teorema dei punti di Lebesgue per dimostrare un risultato di base riguardo alla regolarizzazione per convoluzione, di fondamentale importanza nel nostro approccio agli spazi di Sobolev.

1.1. **Teorema di ricoprimento di Vitali.** Limitatamente a questa sezione, indichiamo con B una generica palla chiusa non degenere (i.e., di raggio positivo) di $\mathbb{R}^n$, e con B^* la palla chiusa concentrica a B e di raggio pari a cinque volte il raggio di B. Il seguente teorema di Vitali permette di estrarre da un qualunque ricoprimento di palle chiuse (non degeneri e con estremo superiore dei diametri limitato) un sottoricoprimento *numerabile* e *disgiunto*, l'unione dei cui elementi *dilatati di un fattore cinque* basti a contenere tutte le palle del ricoprimento originario.

Teorema 1.3 (Teorema di ricoprimento di Vitali)**.** *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di palle chiuse non degeneri di $\mathbb{R}^n$, con*

$$d = \sup_{B\in\mathcal{B}} \operatorname{diam}(B) < \infty\,.$$

Allora esiste una sottofamiglia $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{B}$ che risulti numerabile, disgiunta, e tale che

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B^*\,. \tag{1.2}$$

In assenza di una delle due ipotesi su $\mathcal{B}$ è facile costruire esempi in cui la tesi del teorema non può essere verificata. Per quanto riguarda la prima ipotesi, basta considerare un insieme E più che numerabile e considerare la famiglia $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in E\}$ costituita da sole palle degeneri. Per quanto riguarda la seconda ipotesi, preso un qualunque $x \in \mathbb{R}^n$, si considererà la famiglia $\mathcal{B} = \{\overline{B_r(x)} : r > 0\}$. In entrambi i casi è impossibile l'esistenza di un sottoricoprimento numerabile e disgiunto con la proprietà (1.2).

Esempio 1.1. Data una funzione positiva e limitata $r : (0,1) \to \mathbb{R}$ si consideri la famiglia di palle $\mathcal{B} = \{B_{r(t)}(t\,e_1) : t \in (0,1)\}$. Visualizzare l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Vitali su questo esempio.

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{N}$, consideriamo le palle in $\mathcal{B}$ che abbiamo diametro compreso fra $d/2^{h+1}$ e $d/2^h$,

$$\mathcal{B}_h = \left\{ B \in \mathcal{B} : \frac{d}{2^{h+1}} < \operatorname{diam} B \leq \frac{d}{2^h} \right\}.$$

Le ipotesi fatte su $\mathcal{B}$ ci assicurano che risulti $\mathcal{B} = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_h$ con $\mathcal{B}_h \cap \mathcal{B}_k = \emptyset$ se $h \neq k$. Costruiamo adesso una successione di famiglie $\{\mathcal{B}'_h\}_{h\in\mathbb{N}}$, ciascuna numerabile e disgiunta, con $\mathcal{B}'_h$ contenuta in $\mathcal{B}_h$, utilizzando il seguente ragionamento induttivo:

(i) Come $\mathcal{B}'_0$ scegliamo una qualunque sottofamiglia di $\mathcal{B}_0$ che abbia la proprietà di essere numerabile, disgiunta e massimale rispetto all'inclusione (i.e., ogni palla di $\mathcal{B}_0$ deve intersecare almeno una palla di $\mathcal{B}'_0$.

(ii) Definite le famiglie $\{\mathcal{B}'_h\}_{0\leq h\leq k-1}$, sceglieremo come $\mathcal{B}'_k$ una qualunque sottofamiglia di

$$\left\{ B \in \mathcal{B}_k : B \cap B' = \emptyset,\ \forall B' \in \bigcup_{h=0}^{k-1} \mathcal{B}'_h \right\}$$

che risulti numerabile, disgiunta e massimale rispetto all'inclusione.

Verifichiamo allora che la famiglia $\mathcal{B}' = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} \mathcal{B}'_h$ soddisfa la tesi del teorema. Poichè le famiglie $\mathcal{B}_h$ sono mutualmente disgiunte, e poichè ciascuna di esse contiene la sottofamiglia $\mathcal{B}'_h$ che è essa stessa numerabile e disgiunta, risulta che $\mathcal{B}'$ è costituita da una quantità numerabile di palle disgiunte. Sia ora B_1 una qualunque palla di $\mathcal{B}$. Necessariamente $B_1 \in \mathcal{B}_k$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$. Per costruzione, o B_1 interseca una palla proveniente da $\bigcup_{h=0}^{k-1} \mathcal{B}'_h$ oppure ne interserca una proveniente da $\mathcal{B}'_k$. In entrambi i casi esiste una palla $B_2 \in \mathcal{B}'$, con $\operatorname{diam} B_2 \geq d/2^{k+1}$, tale che $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Poichè $\operatorname{diam} B_1 \leq d/2^k \leq 2 \operatorname{diam} B_2$ segue allora $B_1 \subset (B_2)^*$. □

1.2. **Funzione massimale e teorema di Hardy-Littlewood.** Data $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definiamo una funzione $Mu : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, detta funzione massimale di u, ponendo

$$Mu(x) = \sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} |u| \,.$$

Poichè la corrispondenza $(x, r) \mapsto \fint_{B_r(x)} |u|$ definisce una funzione continua su $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, la funzione massimale è sempre semicontinua inferiormente (e, in particolare, Boreliana, dunque misurabile). Qualora u risulti continua, avremo evidentemente

$$|u(x)| = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y)| dy \leq Mu(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ (e in realtà, tale disuguaglianza sarà a posteriori sempre verificata da ogni $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ su q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ proprio grazie al teorema dei punti di Lebesgue). Il teorema massimale di Hardy-Littlewood stabilisce che la grandezza della funzione massimale (in una opportuna norma) è a sua volta controllata dalla grandezza di u stessa.

Teorema 1.4 (Teorema massimale di Hardy-Littlewood)**.** *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora*

$$\|Mu\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} \leq 5^n \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{1.3}$$

Nella (1.3) compare la norma L^1 debole di Mu. Questo tipo di norma è una naturale generalizzazione della norma L^p come strumento per misurare la grandezza delle funzioni. Più precisamente, data una funzione misurabile $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si consideri la sua funzione di distribuzione $\mu : (0, \infty) \to [0, \infty]$

$$\mu(t) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |u(x)| > t\}| \,, \quad t > 0 \,.$$

Si verifica facilmente che se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p = p \int_0^\infty \mu(t) t^{p-1} dt \,. \tag{1.4}$$

Infatti in tali ipotesi possiamo applicare il teorema di Fubini su $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ come segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^\infty 1_{[0,|u(x)|]}(t) p\, t^{p-1}\, dt = p \int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_{[0,|u(x)|]}(t) dx \right) dt \\ &= p \int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{|u|>t\}}(x) dx \right) dt = p \int_0^\infty \mu(t) t^{p-1} dt \,, \end{aligned}$$

dove si è indicato, per brevità, $\{|u| > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |u(x)| > t\}$. La norma L^p di u è dunque collegata alla norma L^1 della funzione di distribuzione μ rispetto alla misura $p\, t^{p-1} dt$ su $(0, \infty)$. La norma L^1 debole di u è associata ad un altro modo di misurare la grandezza di μ, più precisamente alla validità di una stima puntuale del tipo $\mu(t) \le C\, t^{-1}$. Si pone infatti

$$\|u\|_{L^1_w(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0} t\, |\{|u| > t\}|\,.$$

Chiaramente la norma L^1_w è sempre controllata dalla norma L^1, in quanto per ogni $t > 0$ abbiamo $t\, |\{|u| > t\}| \le \int_{\mathbb{R}^n} |u|$. Il viceversa è falso, come si può ad esempio verificare in dimensione $n = 1$ considerando la funzione

$$u(x) = \frac{1_{(-1,1)}(x)}{|x|}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

per cui risulta $\|u\|_{L^1(\mathbb{R})} = \infty$ e $\|u\|_{L^1_w(\mathbb{R})} = 2$. Fatta questa premessa, passiamo alla dimostrazione del teorema massimale.

Dimostrazione: Fissato $t > 0$, osserviamo che, per definizione, ad ogni $x \in \{Mu > t\}$, possiamo associare un numero positivo $r(x) > 0$ tale che risulti

$$|B(x, r(x))| t < \int_{B(x,r(x))} |u|\,. \tag{1.5}$$

In particolare $\mathcal{B} = \{\overline{B(x, r(x))} : x \in \{Mu > t\}\}$ è una famiglia di palle chiuse non degeneri di $\mathbb{R}^n$, con estremo superiore dei diametri limitato in quanto, proprio da (1.5), indicata con ω_n la misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$,

$$r(x) \le \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |u|}{t\, \omega_n} \right)^{1/n}\,, \quad \forall x \in \{Mu > t\}\,.$$

Per il Teorema di ricoprimento di Vitali troviamo allora una successione di palle $\{B_h\}_{h\in\mathbb{N}}$, $B_h = \overline{B(x_h, r(x_h))}$, tali che, posto $B^*_h = \overline{B(x_h, 5\, r(x_h))}$,

$$\{Mu > t\} \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} B^*_h\,, \tag{1.6}$$

$$B_h \cap B_k = \emptyset\,, \quad h \ne k\,. \tag{1.7}$$

Applicando, nell'ordine, (1.6), la σ-subadditività della misura di Lebesgue, (1.5) e (1.7), troviamo allora

$$|\{Mu > t\}| \le \left| \bigcup_{h\in\mathbb{N}} B^*_h \right| \le \sum_{h\in\mathbb{N}} |B^*_h| = 5^n \sum_{h\in\mathbb{N}} |B_h| \le \frac{5^n}{t} \sum_{h\in\mathbb{N}} \int_{B_h} |u| = \frac{5^n}{t} \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,,$$

i.e.

$$\sup_{t>0} t\, |\{Mu > t\}| \le 5^n \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,,$$

che è la tesi del teorema. □

1.3. **Dimostrazione del Teorema dei punti di Lebesgue.** *Passo uno:* Iniziamo col dimostrare che se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora esiste un insieme misurabile E con $|E| = 0$ e

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy = u(x)\,, \tag{1.8}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$. Infatti, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ allora abbiamo

$$\begin{aligned} & \left| u(x) - \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \right| = \left| \fint_{B_r(x)} (u(x) - u(y))\,dy \right| \\ \leq \;& |u(x) - v(x)| + \left| \fint_{B_r(x)} (v(x) - v(y))\,dy \right| + \left| \fint_{B_r(x)} (v(y) - u(y))\,dy \right| \\ \leq \;& |u(x) - v(x)| + \sup_{y\in B_r(x)} |v(x) - v(y)| + M|u - v|(x)\,. \end{aligned}$$

Per $r \to 0^+$, poichè v è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$, troviamo che la funzione

$$F(x) = \limsup_{r\to 0} \left| u(x) - \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \right|\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

soddisfa la disuguaglianza

$$F(x) \leq |u(x) - v(x)| + M|u - v|(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,, v \in C^0_c(\mathbb{R}^n)\,.$$

In particolare per ogni $t > 0$ deve risultare

$$\{F > t\} \subset \left\{ |v - u| > \frac{t}{2} \right\} \cup \left\{ M|v - u| > \frac{t}{2} \right\}.$$

Poichè $|u - v| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema massimale di Hardy-Littlewood,

$$\begin{aligned} |\{F > t\}| \;&\leq\; \left| \left\{ |v - u| > \frac{t}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ M|v - u| > \frac{t}{2} \right\} \right| \\ &\leq\; \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |v - u| + \frac{2\cdot 5^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |v - u|\,. \end{aligned}$$

Per densità di $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ troviamo dunque che $|\{F > t\}| = 0$ per ogni $t > 0$. Posto

$$E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ F > \frac{1}{k} \right\}\,,$$

poichè F è una funzione misurabile, risulta allora che E è un misurabile, con $|E| = 0$, e tale che (1.8) sia valida per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Passo due: Si dimostra (1.8) nel caso in cui si abbia semplicemente $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dato $k \in \mathbb{N}$ si ha $u_k = 1_{B_k} u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Per il passo uno troviamo una successione $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}^n$ tali che, se $x \in B_k \setminus E_k$ allora

$$u(x) = u_k(x) = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_r(x)} u_k(y)dy = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_r(x)} u(y)dy\,,$$

in quanto, fissato $x \in B_k$, $B_r(x) \subset B_k$ per ogni $r < k - |x|$. Si conclude ponendo $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

Passo tre: Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e sia $q \in \mathbb{Q}$. Applichiamo il passo due alla funzione $|u - q| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, trovando un insieme di misura nulla $E(q)$ tale che

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y) - q|\, dy = |u(x) - q|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E(q)\,.$$

Posto allora $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E(q)$, E è un insieme di misura nulla tale che, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$,

$$\limsup_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\, dy \le \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y) - q|\, dy + |u(x) - q| = |u(x) - q|\,, \quad \forall q \in \mathbb{Q}\,.$$

Per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ si conclude che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$,

$$\limsup_{r\to 0} \fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\, dy = 0\,.$$

1.4. **Convoluzione e regolarizzazione.** In questa sezione utilizziamo il teorema dei punti di Lebesgue per dimostrare le principali proprietà di approssimazione per convoluzione con un nucleo regolarizzante negli spazi L^p. Consideriamo la funzione

$$\rho(z) = c\, e^{1/(1-|z|^2)}\,, \quad z \in \mathbb{R}^n\,,$$

dove la costante $c > 0$ viene scelta in modo tale da avere

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1\,.$$

Osserviamo che $\rho \ge 0$, con $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{spt}(\rho) = B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Si pone allora

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\,, \quad z \in \mathbb{R}^n\,,$$

in modo che risulti $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon = 1$, $\rho_\varepsilon \ge 0$, $\rho_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{spt}(\rho_\varepsilon) = B_\varepsilon(0)$. Definiamo infine

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\rho_\varepsilon(x - y)dy\,,$$

la ε-regolarizzata di $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Poichè $y \mapsto \rho_\varepsilon(x - y)$ ha supporto nella palla $B_\varepsilon(x)$, la ε-regolarizzata $u_\varepsilon(x)$ è una media di u su scala ε intorno ad x, pesata attraverso una funzione infinitamente derivabile.

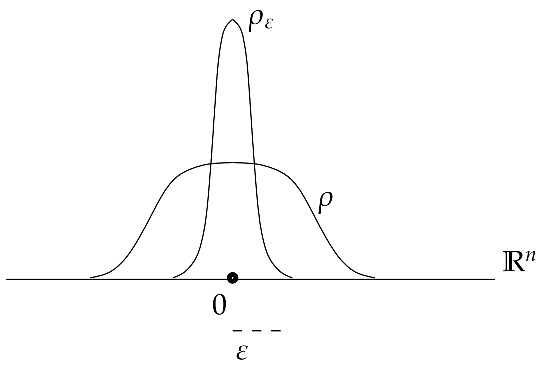


Figure 1. Il nucleo regolarizzante ρ e la sua riscalata ρ_ε.

Teorema 1.5. *Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\varepsilon > 0$ con*

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\nabla\rho_\varepsilon(x-y)dy\,, \tag{1.9}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre, per $\varepsilon \to 0$,

(1) *Se x punto di Lebesgue di u allora $u_\varepsilon(x) \to u(x)$.*
(2) *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, allora $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
(3) *Se u è continua su $\mathbb{R}^n$ allora $u_\varepsilon \to u$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Se u è uniformemente continua su $\mathbb{R}^n$ allora $u_\varepsilon \to u$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo evidentemente,

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| = \left|\int_{B_\varepsilon(x)} (u(x) - u(y))\rho_\varepsilon(x-y)dy\right| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |u(x) - u(y)|\rho_\varepsilon(x-y)dy\,.$$

Da questa disuguaglianza, (3) segue immediatamente. In generale usando le definizione di ρ_ε troviamo che $\sup_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon \leq \varepsilon^{-n}\sup_{\mathbb{R}^n}\rho$, pertanto

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \omega_n \sup_{\mathbb{R}^n}\rho \fint_{B_\varepsilon(x)} |u(x) - u(y)|dy\,.$$

Se dunque x è un punto di Lebesgue di u allora $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ e (1) è dimostrata. Per il resto, si ragiona come segue.

Passo uno: Dimostriamo che $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, iniziando col provare la (1.9). Sia τ un vettore unitario di $\mathbb{R}^n$, e consideriamo il rapporto incrementale di passo h della u_ε nel punto $x \in \mathbb{R}^n$ in direzione τ,

$$\frac{u_\varepsilon(x+h\tau) - u_\varepsilon(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\frac{\rho_\varepsilon((x+h\tau)-y) - \rho_\varepsilon(x-y)}{h}\,dy\,. \tag{1.10}$$

Poichè $\rho_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ risulta che

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho_\varepsilon((x+h\tau)-y) - \rho_\varepsilon(x-y)}{h} = \nabla\rho_\varepsilon(x-y)\cdot\tau\,,$$

uniformemente per $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pertanto possiamo passare al limite sotto segno di integrale e trovare che u_ε è differenziabile in x con

$$\nabla u_\varepsilon(x)\cdot\tau = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)(\nabla\rho_\varepsilon(x-y)\cdot\tau)dy\,.$$

Per arbitrarietà di τ troviamo la (1.10). Ragionando analogamente si verifica che per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione u_ε risulta differenziabile k volte, con

$$\nabla^{(k)}u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\nabla^{(k)}\rho_\varepsilon(x-y)dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Passo due: Dimostriamo la proprietà (2). Iniziamo dimostrando che se E è un misurabile di $\mathbb{R}^n$ e che se $I_\varepsilon(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, E) < \varepsilon\}$, allora

$$\int_E |u_\varepsilon|^p \leq \int_{I_\varepsilon(E)} |u|^p\,, \tag{1.11}$$

per ogni $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Infatti grazie alla disuguaglianza di Hölder abbiamo che

$$|u_\varepsilon(x)| \le \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|\rho_\varepsilon(x-y)dy \le \left(\int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|^p \rho_\varepsilon(x-y)dy\right)^{1/p}.$$

Dunque per Fubini

$$\begin{aligned}\int_E |u(x)|^p dx &\le \int_E dx \int_{B_\varepsilon(x)} |u(y)|^p \rho_\varepsilon(x-y)dy \\ &= \int_{I_\varepsilon(E)} |u(y)|^p \left(\int_{B_\varepsilon(y)\cap E} \rho_\varepsilon(x-y)dx\right)dy \le \int_{I_\varepsilon(E)} |u(y)|^p dy\,,\end{aligned}$$

che è la stima (1.11). Per dimostrare la (2) consideriamo $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e osserviamo che

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|u-v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v-v_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v_\varepsilon-u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Per linearità della ε-regolarizzazione, $v_\varepsilon - u_\varepsilon = (v-u)_\varepsilon$, e quindi, applicando la stima (1.11) a $v-u$ su $E = \mathbb{R}^n$ troviamo

$$\|u-u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\|u-v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v-v_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Pertanto

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \|u-u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2\|u-v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Per arbitrarietà di $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e per densità di $C^0(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ concludiamo la dimostrazione. □

Osservazione 1.1. Si verifica facilmente che se $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ allora $u_\varepsilon \to u$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\mathrm{spt}(u_\varepsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, \mathrm{spt}(u)) < \varepsilon\}\,.$$

Osservazione 1.2. Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che $a \le u(x) \le b$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, dove $-\infty \le a < b \le \infty$. Allora abbiamo $a \le u_\varepsilon(x) \le b$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Infatti abbiamo ad esempio

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy \ge b\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon = b\,,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.3. Dalla precedente osservazione, se $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora

$$|u_\varepsilon(x)| \le \|u\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))}\,. \tag{1.12}$$

Dalla proprietà (1) del Teorema 1.5 deduciamo allora per convergenza dominata che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_K u_\varepsilon\, v = \int_K u\, v\,,$$

per ogni $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni compatto K, cioè u_ε converge ad u nella convergenza debole star di $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

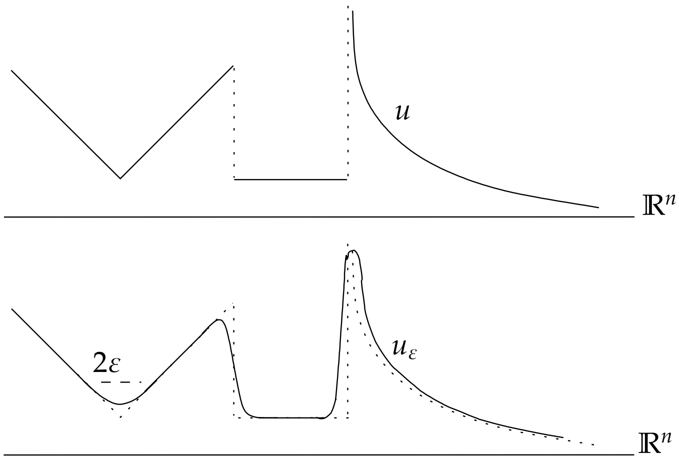


FIGURE 2. Un esempio di come agisca la procedura di ε-regolarizzazione.

Osservazione 1.4. La seguente osservazione può risultare utile per visualizzare il procedimento di ε-regolarizzazione. Si noti che la funzione ρ che abbiamo scelto ha baricentro nullo, cioè $\int_{\mathbb{R}^n} x\rho(x)dx = 0$. Se dunque u è affine su un aperto Ω, posto $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, avremo $u_\varepsilon(x) = u(x)$ per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$. Infatti avremo per un opportuno $v \in \mathbb{R}^n$,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} (u(x) + v \cdot (x-y))\rho_\varepsilon(x-y)dy = u(x) + v \cdot \int_{B_\varepsilon(x)} (x-y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = u(x)\,.$$

Un ragionamento analogo permette di dimostrare che dato un convesso Ω, se u è convessa in Ω allora $u_\varepsilon \geq u$ su Ω_ε, se è u è concava in Ω allora $u_\varepsilon \leq u$ su Ω_ε.

2. METODO DIRETTO ED ESITENZA DEI MINIMI

2.1. **Gradiente debole e spazi di Sobolev.** Data una funzione $v \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, una semplice conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale e del teorema di Fubini è la seguente istanza del teorema di Gauss-Green

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v\,. \tag{2.1}$$

Date $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e applicando questa formula a $v = u\,\varphi$ troviamo allora la formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\,\nabla\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\nabla u\,, \tag{2.2}$$

che costituisce il punto di partenza della seguente definizione di gradiente debole (o distribuzionale). Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia u una funzione ivi localmente sommabile, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si dice che il campo vettoriale $T \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ è un gradiente debole per u in Ω se vale la formula

$$\int_\Omega u\,\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\,T\,, \quad \forall\varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,. \tag{2.3}$$

Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni implica che il gradiente debole, qualora esista, sia univocamente determinato come elemento di $L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Inoltre, in virtù della (2.2), il gradiente classico ∇u di una funzione $u \in C^1(\Omega)$ è anche un gradiente debole. Pertanto si usa sempre la notazione ∇u per indicare il gradiente debole di una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Quando $n = 1$ parliamo di derivata debole e scriviamo u' invece di ∇u.

Osservazione 2.1. La definizione di gradiente debole dipende in linea di principio dalla scelta dell'aperto Ω considerato. Tuttavia se Ω_1 e Ω_2 sono insiemi aperti e u ammette gradiente debole T_1 in Ω_1 e T_2 in Ω_2 allora $T_1 = T_2$ q.o. in $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Osservazione 2.2. L'esistenza di un gradiente classico q.o. in Ω non è in generale sufficiente ad assicurare l'esistenza di un gradiente debole in Ω. Mostriamo una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che ammette un gradiente debole (ed è in realtà infinitamente derivabile) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma che non ammette gradiente debole in $\mathbb{R}$. Basta porre

$$u(x) = 1_{(0,\infty)}(x)\,.$$

Ovviamente u è limitata (dunque localmente sommabile) su $\mathbb{R}$, e ha derivata classica nulla nell'aperto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In particolare u ha un gradiente debole in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dato dalla funzione nulla. Se u ammettesse derivata debole u' in $\mathbb{R}$ risulterebbe allora $u' = 0$ q.o. su $\mathbb{R}$, e in particolare (2.3) implicherebbe

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = 0\,, \quad \forall\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})\,.$$

D'altra parte, tenendo conto della particolare scelta di u, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = \int_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(0)\,,$$

pervenendo così all'assurdo $\varphi(0) = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Dato $p \in [1, \infty]$ e un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è definito come l'insieme delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ che ammettono gradiente debole in Ω, con $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è un sotto-spazio vettoriale di $L^p(\Omega)$, ed è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\,.$$

La semplice verifica di questo fatto si basa sulla completezza degli spazi L^p e sulla seguente osservazione.

Lemma 2.1. *Sia $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione di $W^{1,p}(\Omega)$ e siano $u \in L^p(\Omega)$ e $T \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tali che $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ e*

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \nabla u_h = \int_\Omega \varphi\, T\,, \tag{2.4}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\nabla u = T$.

Dimostrazione. Poichè $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ abbiamo immediatamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \nabla\varphi = \lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_h \nabla\varphi = -\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, \nabla u_h\,.$$

Dunque T è un gradiente debole per u in Ω in virtù di (2.4). □

Osservazione 2.3. Osserviamo esplicitamente che non si ha mai l'inclusione di $C^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Introducendo lo spazio vettoriale $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ delle funzioni $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ che ammettono gradiente distribuzionale ∇u in Ω tale che $\nabla u \in L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ si ha chiaramente $C^1(\Omega) \subset W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Inoltre, se Ω è limitato, allora grazie all'inclusione $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ troviamo che

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Nei due esempi che seguono mostriamo come le funzioni di Sobolev possano presentare delle singolarità inammissibili per le funzioni di classe C^1.

Esempio 2.1. In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, consideriamo la funzione $u : B \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}\,, \quad \alpha > 0\,, x \in B\,.$$

Abbiamo $u \in L^p(B)$ se e solo se

$$\int_0^1 r^{n-1-\alpha p} dr < \infty \quad \text{se e solo se} \quad \alpha < \frac{n}{p}\,.$$

Inoltre $u \in C^\infty(B \setminus \{0\})$, con gradiente classico dato da

$$-\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \frac{x}{|x|}\,, \quad x \neq 0\,.$$

Se dunque u ammette un gradiente debole T in B, deve per forza essere

$$T(x) = -\frac{\alpha}{|x|^{\alpha+1}} \frac{x}{|x|}\,, \quad \text{per q.o. } x \in B\,.$$

Osserviamo ora che un tale $T \in L^p(B;\mathbb{R}^n)$ se e solo se

$$\int_0^1 r^{n-1-(\alpha+1)p} dr < \infty \quad \text{se e solo se} \quad \alpha < \frac{n}{p} - 1\,.$$

Consideriamo dunque $p \in [1, n)$, e scegliamo $\alpha \in (0, (n/p) - 1)$ in modo da avere u e T in L^p. Verifichiamo ora che sotto queste ipotesi T è un gradiente debole di u in B. Siano infatti $\varphi \in C_c^\infty(B)$ ed $\varepsilon \in (0, 1)$. Dal Teorema di Gauss-Green e dal fatto che $\varphi = 0$ su ∂B troviamo

$$\int_{B\setminus B_\varepsilon} u\nabla\varphi \;=\; -\int_{B\setminus B_\varepsilon} \varphi\, T + \int_{\partial B_\varepsilon} u(x)\varphi(x)\, \frac{x}{|x|} d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,.$$

Per $\varepsilon \to 0^+$, poichè u e T sono in L^p, troviamo facilmente

$$\int_B u\nabla\varphi = -\int_B \varphi\, T\,,$$

in quanto, per $\varepsilon \to 0^+$, in virtù del fatto che $\alpha < (n/p) - 1 \le n - 1$,

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} u(x)\,\varphi(x)\, \frac{x}{|x|}\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right| \le \sup_B |\varphi|\, \frac{C(n)\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^\alpha} \to 0\,.$$

Dunque $u \in W^{1,p}(B)$ ma $u \notin L^\infty(B)$. Consideriamo poi la successione di funzioni

$$u_h(x) = \sum_{k=0}^{h} \frac{2^{-k}}{|x - x_k|^\alpha}\,, \quad x \in B\,,$$

dove $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un insieme denso in B. Se $p \in [1, n)$ e $\alpha \in (0, (n/p) - 1)$, per quanto visto sopra, $u_h \in W^{1,p}(B)$. Si verifica pure facilmente che $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $W^{1,p}(B)$, quindi ammette un limite $v \in W^{1,p}(B)$. In questo modo si è costruita una funzione $v \in W^{1,p}(B)$, $1 \le p < n$, tale che $v \notin L^\infty_{loc}(B)$.

Indichiamo ora $u_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$, abbiamo dimostrato che $\{u_\alpha\}_{0<\alpha<(n/p)-1} \subset W^{1,p}(B)$. Osserviamo che $u_\alpha \in L^q(B)$ se e solo se $q < (n/\alpha)$. Dunque il più grande spazio $L^q(B)$ contenente l'intera famiglia $\{u_\alpha\}_{0<\alpha<(n/p)-1}$ si trova in corrispondenza dell'esponente critico

$$q = \frac{np}{n-p}\,,$$

si veda il Teorema 2.23.

Esempio 2.2. In $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, consideriamo la funzione $u : B \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$u(x) = |x|^\alpha\,, \quad \alpha > 0\,, x \in B\,.$$

Ragionando come nell'esempio precedente si verifica che, se $p > n$, allora $u \in W^{1,p}(B)$ per ogni $\alpha > 1 - (n/p)$. In particolare $W^{1,p}(B)$, $p > n$, contiene funzioni che presentano singolarità di tipo α-Höleriano. Posto $u = u_\alpha$, il più grande spazio $C^{0,\beta}(B)$ contenente l'intera famiglia $\{u_\alpha\}_{1-(n/p)<\alpha<1} \subset W^{1,p}(B)$ è associato all'esponente critico

$$\beta = 1 - \frac{n}{p}\,,$$

si veda il Teorema 2.22.

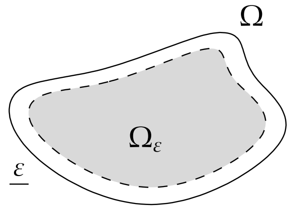


FIGURE 3. L'insieme Ω_ε costruito a partire da un aperto Ω.

Esempio 2.3. Come visto nell'esempio 2.1, in dimensione $n \geq 2$ le funzioni di Sobolev possono essere discontinue (questo non accade in dimensione $n = 1$, si veda il Teorema 2.21). C'è tuttavia un limite alla dimensione massima dell'insieme di discontinuità. Ad esempio, utilizzando il teorema di Gauss-Green sul semispazio $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ non è difficile generalizzare l'argomento dell'osservazione 2.2 per dimostrare che la funzione $u(x) = 1_H(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, pur essendo liscia nell'aperto $\mathbb{R}^n \setminus \{x_n = 0\}$ non può appartenere a $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ (si veda l'osservazione 2.17).

2.2. **Regolarizzazione delle funzioni di Sobolev e conseguenze.** Sia Ω un insieme aperto e, dato $\varepsilon > 0$, definiamo

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\} .$$

Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora la sua ε-regolarizzata u_ε è definita su Ω_ε e soddisfa $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ con

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u(y) \nabla \rho_\varepsilon(x - y) dy , \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon .$$

Applicando la definizione di gradiente debole in Ω alla funzione $\varphi(y) = \rho_\varepsilon(x - y)$ si trova allora

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x - y) \nabla u(y) dy = (\nabla u)_\varepsilon(x) , \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon , \tag{2.5}$$

i.e. il gradiente della ε-regolarizzata è l'ε-regolarizzata del gradiente. Sia quindi Ω' un aperto ben contenuto in Ω, e consideriamo valori di ε tali che Ω' risulti ben contenuto in Ω_ε. Dalla (2.5) e dal Teorema 1.5 segue immediatamente che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(\Omega')} = 0 , \quad \text{se } p \in [1, \infty) . \tag{2.6}$$

A partire da questa osservazione possiamo dimostrare il seguente teorema, di grande utilità.

Teorema 2.2 (Chain rule). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $|\Omega| < \infty$, e sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che, per una costante $M < \infty$, risulti $|f'(s)| \leq M$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, allora $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$, con gradiente debole in Ω dato da*

$$\nabla(f \circ u) = (f' \circ u) \nabla u .$$

Dimostrazione: Poichè $|f(s)| \leq |f(0)| + M|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ si verifica facilmente che $f \circ u \in L^p(\Omega)$. E' altresì immediato verificare che $(f' \circ u)\nabla u \in L^p(\Omega)$, dunque rimane da provare che, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ risulti

$$\int_\Omega (f \circ u)\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\,(f' \circ u)\nabla u\,. \tag{2.7}$$

Data $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che spt$\varphi \subset \Omega'$, e consideriamo valori di $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccoli da avere $\Omega' \subset \Omega_\varepsilon$. Per il teorema di Gauss-Green (2.2) e poichè $f \circ u_\varepsilon \in C^1(\Omega)$ abbiamo immediatamente

$$\int_{\Omega'} (f \circ u_\varepsilon)\nabla\varphi = -\int_{\Omega'} \varphi\,(f' \circ u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\,. \tag{2.8}$$

Dimostriamo la (2.7) passando al limite $\varepsilon \to 0$ in (2.8).

Nel caso $1 \le p < \infty$ osserviamo che $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega')$ e che $|f(s) - f(t)| \le M|s-t|$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. Dunque $(f \circ u_\varepsilon) \to (f \circ u)$ in $L^p(\Omega')$ e pertanto troviamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega'} (f \circ u_\varepsilon)\nabla\varphi = \int_{\Omega'} (f \circ u)\nabla\varphi\,.$$

Nel caso $p = \infty$ si perviene ad una analoga conclusione in quanto $u_\varepsilon \to u$ q.o. in Ω' e dunque $(f \circ u_\varepsilon) \to (f \circ u)$ q.o. in Ω'; inoltre, da (1.12), $\|f \circ u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \le \max\{f(s) : |s| \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\}$, e dunque possiamo passare al limite per convergenza dominata.

Riguardo il termine di destra nella (2.8), si osserva che, per ogni p, $u_\varepsilon \to u$ q.o. in Ω' e quindi $(f' \circ u_\varepsilon) \to (f' \circ u)$ q.o. in Ω' con $|f' \circ u_\varepsilon| \le M$ su Ω'. Ancora per convergenza dominata si può passare al limite come desiderato. □

Osservazione 2.4. Se $|\Omega| = \infty$ la tesi del teorema rimane vera a patto di assumere che risulti $f(0) = 0$, in modo da garantire $f \circ u \in L^p(\Omega)$.

Osservazione 2.5. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, l'ipotesi $|f'(s)| \le M$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ può essere indebolita richiedendo solamente $|f'(s)| \le M$ per ogni s tale che $|s| \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. La dimostrazione rimane invariata, grazie ancora alla (1.12) che assicura $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Con un ragionamento analogo a quello usato nella dimostrazione del Teorema 2.2 si dimostra anche il seguente utile lemma:

Lemma 2.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 \le p \le \infty$. Per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ risulta $\zeta u \in W^{1,p}(\Omega)$, con gradiente debole*

$$\nabla(\zeta u) = u\nabla\zeta + \zeta\nabla u\,.$$

E' utile estendere il Teorema 2.2 al caso di composizioni con funzioni f la cui derivata possa essere discontinua. Questa estensione è possibile nella classe delle funzioni f Lipschitziane. In questo corso ci basterà considerare il caso $f(s) = |s|$. Definiamo $s^+ = \max\{s, 0\}$ e $s^- = \max\{-s, 0\}$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, e poniamo

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega : u(x) > t\}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

se $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

Lemma 2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Allora u^+, u^- e $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$, con*

$$\nabla u^+ = 1_{\{u>0\}}\nabla u\,, \quad \nabla u^- = -1_{\{u<0\}}\nabla u\,, \quad \nabla|u| = (1_{\{u>0\}} - 1_{\{u<0\}})\nabla u\,.$$

In particolare, per ogni $t \in \mathbb{R}$, risulta

$$\nabla u(x) = 0\,, \quad \text{per q.o. } x \in \{u = t\}. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon^2 + s^2} - \varepsilon\,, & s \ge 0\,,\\ 0\,, & s < 0\,. \end{cases}$$

Allora $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ con $|f_\varepsilon'(s)| \le 1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Inoltre, posto $f(s) = s^+$, abbiamo $f_\varepsilon \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$, con $f_\varepsilon'(s) \to 1_{(0,\infty)}(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, in quanto

$$f_\varepsilon'(s) = \begin{cases} \frac{s}{\sqrt{\varepsilon^2+s^2}}\,, & s > 0\,,\\ 0\,, & s \le 0\,. \end{cases}$$

Sia dunque $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dal Teorema 2.2 abbiamo che

$$\int_\Omega (f_\varepsilon \circ u)\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi\,(f_\varepsilon' \circ u)\nabla u\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Passando al limite in $\varepsilon \to 0$ troviamo quindi

$$\int_\Omega u^+\,\nabla\varphi = -\int_\Omega \varphi(x)\,1_{(0,\infty)}(u(x))\nabla u(x)\,dx\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,,$$

che comporta $\nabla u^+ = 1_{\{u>0\}}\nabla u$. Si ragiona similmente per u^-, e si conclude su $|u|$ a partire dalla decomposizione $|u| = u^+ + u^-$. Verifichiamo infine la (2.9), dove, senza perdita di generalità, possiamo supporre che sia $t = 0$. Dalla decomposizione $u = u^+ - u^-$ e per equivalenza in L^p dei gradienti deboli segue che, per q.o. $x \in \Omega$,

$$\nabla u(x) = \nabla u^+(x) - \nabla u^-(x) = (1_{\{u>0\}}(x) + 1_{\{u<0\}}(x))\,\nabla u(x)\,. \tag{2.10}$$

Se $|\{u = 0\}| = 0$ la (2.9) è banalmente verificata; se invece $|\{u = 0\}| > 0$, essa segue immediatamente dalla (2.10). □

Corollario 2.5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$, $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, e definiamo*

$$w_{max} = \max\{u, v\}\,.$$

Allora $w_{max} \in W^{1,p}(\Omega)$ e per q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$\begin{aligned} \nabla w_{max}(x) &= 1_{\{u>v\}}(x)\nabla u(x) + 1_{\{u\le v\}}(x)\nabla v(x)\\ &= 1_{\{u\ge v\}}(x)\nabla u(x) + 1_{\{u<v\}}(x)\nabla v(x)\,. \end{aligned}$$

In particolare $\nabla u = \nabla v$ q.o. su $\{u = v\}$.

Dimostrazione: Si applica il Lemma 2.4 a partire dalle due decomposizioni

$$w_{max} = \max\{u - v, 0\} + v\,, \qquad w_{max} = \max\{v - u, 0\} + u\,.$$

□

Mettiamo infine in evidenza un'altra proprietà notevole delle funzioni C^1 che continua a valere nella classe delle funzioni di Sobolev.

Lemma 2.6. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ con gradiente distribuzionale nullo, i.e.*

$$\int_\Omega u\nabla\varphi = 0\,, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \tag{2.11}$$

Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = c$ per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Sia Ω' un aperto connesso ben contenuto in Ω, e sia u_ε la ε-regolarizzata di u relativa ad un valore di ε tale che risulti $\Omega' \subset\subset \Omega_\varepsilon$. Dalla (2.11) abbiamo che, per q.o. $x \in \Omega'$,

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\,\nabla\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = 0\,.$$

Dunque esiste $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $u_\varepsilon(x) = c_\varepsilon$ per ogni $x \in \Omega'$. D'altra parte le funzioni u_ε convergono q.o. in Ω' ad u, pertanto esiste $c(\Omega') \in \mathbb{R}$ tale che $c_\varepsilon \to c(\Omega')$ per $\varepsilon \to 0$, e $u = c(\Omega')$ q.o. in Ω'.

Infine, siano $x, y \in \Omega$ punti di Lebesgue di u. Poichè Ω è connesso in $\mathbb{R}^n$, è anche connesso per archi, quindi esiste $\gamma : [0,1] \to \Omega$ continua tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Poichè $\gamma([0,1])$ è compatto in Ω, esiste $r > 0$ tale che l'intorno di raggio r di $\gamma([0,1])$ definisce un aperto connesso $\Omega' \subset\subset \Omega$. Risulta pertanto $u = c(\Omega')$ q.o. in Ω'. Poichè x è punto di Lebesgue di u troviamo allora $u(x) = \lim_{s\to 0^+} \fint_{B(x,s)} u = c(\Omega')$. Dunque $u(x) = u(y)$ per ogni coppia x, y di punti di Lebesgue di u. □

2.3. **Semicontinuità inferiore e convessità.** In questa sezione discutiamo un fondamentale risultato di semicontinuinità inferiore che avremo modo di utilizzare più volte nelle sezioni successive. La dimostrazione del teorema di semicontinuità che presenteremo origina da un celebre lavoro di James Serrin [14], e presenta una elegante applicazione dei risultati riguardanti la procedura di ε-regolarizzazione che sono stati presentati nelle sezioni precedenti. Cominciamo col ricordare che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è convessa se

$$f(t\xi + (1-t)\eta) \le t\,f(\xi) + (1-t)\,f(\eta)\,, \quad \forall\xi, \eta \in \mathbb{R}^n\,, t \in [0,1]\,.$$

Data una misura di probabilità μ su un insieme X (i.e. $\mu(X) = 1$) e una funzione μ-misurabile $u : X \to \mathbb{R}^n$ di classe $L^1(X,\mu)$, vale la *disuguaglianza di Jensen* associata ad f, i.e.

$$\int_X f(u(x))d\mu(x) \ge f\left(\int_X u(x)d\mu(x)\right)\,. \tag{2.12}$$

La dimostrazione si basa sul fatto che una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$ può sempre esprimersi come estremo superiore di funzioni affini, i.e. esiste sempre $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tale che

$$f(\xi) = \sup\{a + \eta\cdot\xi : (a,\eta) \in \Gamma\}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Per ogni $(a,\eta) \in \Gamma$ abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int_X f(u(x))d\mu(x) &\geq \int_X (a + \eta \cdot u(x))d\mu(x) = a + \eta \cdot \left(\int_X u(x)d\mu(x) \right) \\ &= g\left(\int_X u(x)d\mu(x) \right), \end{aligned}$$

dove si è posto $g(\xi) = a + \eta \cdot \xi$. Poichè $f = \sup_\Gamma g$ la (2.12) segue. La convessità di f risulta sufficiente alla semicontinuità inferiore del funzionale $F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)$, come dimostriamo nel seguente lemma.

Teorema 2.7. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una funzione convessa, sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $u_h, u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tali che $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Allora*

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h)\,.$$

Dimostrazione. Sia Ω' un aperto ben contenuto in Ω. Consideriamo le ε-regolarizzate $(u_h)_\varepsilon$ e u_ε delle u_h e di u rispettivamente. Poichè $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ abbiamo subito

$$\nabla(u_h)_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u_h(y)\nabla\rho_\varepsilon(x-y)dy \to \int_{B_\varepsilon(x)} u_h(y)\nabla\rho_\varepsilon(x-y)dy = \nabla u_\varepsilon(x)\,,$$

per ogni $x \in \Omega'$. Per semicontinuità inferiore di f abbiamo

$$f(\nabla u_\varepsilon(x)) \leq \liminf_{h\to\infty} f(\nabla(u_h)_\varepsilon(x))\,, \quad \forall x \in \Omega'\,,$$

e dunque, dal Lemma di Fatou (ricordiamo che $f \geq 0$)

$$\int_{\Omega'} f(\nabla u_\varepsilon) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_{\Omega'} f(\nabla(u_h)_\varepsilon)\,. \tag{2.13}$$

Ricordando che $\nabla(u_h)_\varepsilon = (\nabla u_h)_\varepsilon$ e applicando Jensen alla misura di probabilità $\rho_\varepsilon(x-y)dy$, abbiamo ora

$$f(\nabla(u_h)_\varepsilon(x)) \leq f\left(\int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)\nabla u_h(y)dy \right) \leq \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y) f(\nabla u_h(y))dy$$

da cui risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f(\nabla(u_h)_\varepsilon) &\leq \int_{\Omega'} dx \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)f(\nabla u_h(y))dy \\ &\leq \int_{I_\varepsilon(\Omega')} f(\nabla u_h(y)) \int_{B_\varepsilon(y)\cap\Omega'} \rho_\varepsilon(x-y)dx \leq \int_\Omega f(\nabla u_h)\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Combinando (2.13) e (2.14) troviamo allora

$$\int_{\Omega'} f(\nabla u_\varepsilon) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h)\,.$$

Poichè $u \in W^{1,1}(\Omega)$, abbiamo $\nabla u_\varepsilon \to \nabla u$ q.o. in Ω'. Ancora da Fatou, nel limite $\varepsilon \to 0$, troviamo

$$\int_{\Omega'} f(\nabla u) \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h)\,.$$

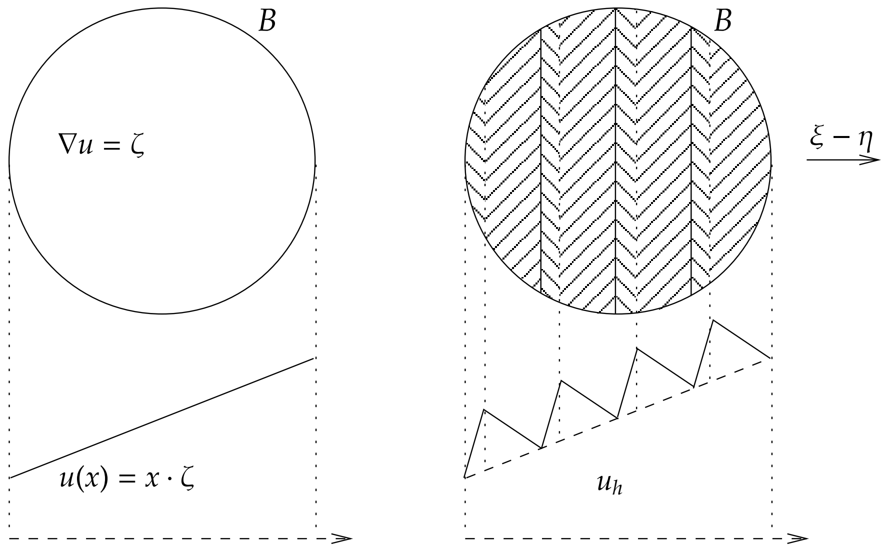


FIGURE 4. Il gradiente della funzione u_h assume solamente i valori ξ ed η in regioni la cui misura è, asintoticamente, pari a $\lambda|B|$ e $(1-\lambda)|B|$ rispettivamente. Questo effetto è creato oscillando tra i due valori ξ ed η su strisce sempre più sottili, ottenendo contemporaneamente la convergenza uniforme delle u_h ad u.

Considerando ora una successione monotona crescente di insiemi Ω' ben contenuti in Ω, la cui unione coincida con Ω, perveniamo alla tesi. □

Osservazione 2.6. E' interessante osservare come la convessità risulti in realtà anche condizione necessaria alla semicontinuità inferiore. Supponiamo infatti che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia tale che

$$\int_B f(\nabla u(x))dx \le \liminf_{h\to\infty} \int_B f(\nabla u_h(x))dx\,, \tag{2.15}$$

per ogni funzione affine $u : B \to \mathbb{R}$ e per ogni successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W^{1,\infty}(B)$ tale che risulti $u_h \to u$ uniformemente in B (qui $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$). Allora f è necessariamente convessa. Consideriamo infatti $t \in (0,1)$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ e $\zeta = t\xi + (1-t)\eta$. Per ogni $x \in B$ poniamo

$$\begin{aligned} u(x) &= \zeta \cdot x\,, \\ u_h(x) &= \zeta \cdot x + \frac{1}{h} H(h\, x \cdot (\xi - \eta))\,, \end{aligned}$$

dove $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione 1-periodica su $\mathbb{R}$ definita su $(0,1)$ dalla formula

$$H(s) = \begin{cases} (1-t)s\,, & s \in (0,t)\,, \\ (1-t)t - t(s-t)\,, & s \in (t,1)\,. \end{cases}$$

In questo modo $H(0) = H(1) = 0$ e $H'(s) = 1 - t$ per $s \in (0,t)$ e $H'(s) = -t$ per $s \in (t,1)$. Ovviamente $u_h \to u$ uniformemente in B, inoltre $\nabla u_h \in \{\xi, \eta\}$, con

$$|\{x \in B : \nabla u_h(x) = \xi\}| \to t|B|\,, \quad |\{x \in B : \nabla u_h(x) = \eta\}| \to (1-t)|B|\,.$$

D'altra parte dalla (2.15) abbiamo

$$|B|f(\zeta) \le \liminf_{h\to\infty} |\{x \in B : \nabla u_h(x) = \xi\} f(\xi) + |\{x \in B : \nabla u_h(x) = \eta\} f(\eta)\,,$$

e concludiamo quindi che $f(t\xi + (1-t)\eta) \le tf(\xi) + (1-t)f(\eta)$, come desiderato.

2.4. **Metodo diretto nella classe delle funzioni Lipschitziane.** I risultati delle precedenti sezioni ci permettono di implementare il Metodo Diretto nella classe delle funzioni Lipschitziane, e dimostrare l'esistenza di minimi in tale classe per problemi variazionali con condizioni di Dirichlet.

2.4.1. *Proprietà di base delle funzioni Lipschitziane.* Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione $u : E \to \mathbb{R}$, la costante di Lipschitz di u in E è definita ponendo

$$\mathrm{Lip}(u; E) = \sup\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|} : x, y \in E\,, x \ne y\right\}.$$

Se $E = \mathbb{R}^n$ poniamo semplicemente $\mathrm{Lip}(u; E) = \mathrm{Lip}(u)$. Se $\mathrm{Lip}(u; E) < \infty$ allora diciamo che u è Lipschitziana su E. Con un innocuo abuso di notazione, denotiamo con $\mathrm{Lip}(E)$ lo spazio vettoriale delle funzioni Lipschitziane su E. Si osservi che se Ω è un insieme aperto allora $\mathrm{Lip}(\Omega)$ coincide con lo spazio $C^{0,1}(\Omega)$ introdotto in precedenza.

Iniziamo col dimostrare che una funzione Lipschitziana su un insieme si può sempre estendere ad una funzione Lipschitziana su tutto $\mathbb{R}^n$, conservando la costante di Lipschitz.

Lemma 2.8 (Lemma di McShane)**.** *Se $E \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathrm{Lip}(E)$ allora esiste $v \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ tale che $u = v$ su E e $\mathrm{Lip}(v) = \mathrm{Lip}(u; E)$.*

Osservazione 2.7 (Valori al bordo)**.** Se Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e se $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ allora, grazie al Lemma di McShane, u può essere estesa per continuità (dunque, univocamente) a $\partial\Omega$, in modo che risulti $\mathrm{Lip}(u; \overline{\Omega}) = \mathrm{Lip}(u; \Omega)$.

Dimostrazione del Lemma di McShane: Posto per brevità $L = \mathrm{Lip}(u; E)$, definiamo

$$v(x) = \inf\{u(y) + L\,|x-y| : y \in E\}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Chiaramente $u = v$ su E e dunque $\mathrm{Lip}(v) \ge L$. Se poi $x, z \in \mathbb{R}^n$ e $y \in E$, allora

$$v(x) \le u(y) + L|x-y| \le u(y) + L|z-y| + L|z-x|\,.$$

Minimizzando su y troviamo $v(x) \le v(z) + L|z-x|$. In particolare $\mathrm{Lip}(v) \le L$, e dunque v è Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Lip}(v) = L$. □

Nel seguente lemma consideriamo la condizione di Lipschitzianità su un aperto e dimostriamo che essa implica sempre l'esistenza di un gradiente debole.

Lemma 2.9. *Se Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ allora u ammette gradiente debole ∇u su Ω, con $\nabla u \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ e $\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)} \le \mathrm{Lip}(u; \Omega)$. Inoltre,*

(i) *se Ω è limitato allora $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$;*

(ii) *se Ω è limitato e se $u = 0$ su $\partial\Omega$, allora*

$$\int_\Omega \nabla u(x)dx = 0\,.$$

Dimostrazione: Passo uno: Sia v l'estensione di u fornita dal Lemma di McShane. Dato $\tau \in S^{n-1}$ e $h \neq 0$ consideriamo le funzioni $\tau_h v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite da

$$\tau_h v(x) = \frac{v(x + h\,\tau) - v(x)}{h}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Chiaramente $\sup_{\mathbb{R}^n} |\tau_h v| \leq \mathrm{Lip}(v)$. Pertanto esistono $h(k) \to 0^+$ per $k \to \infty$ e $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\tau_{h(k)} v \overset{*}{\rightharpoonup} w$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. In particolare,

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{h\to\infty} \|\tau_h v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \mathrm{Lip}(v)\,. \tag{2.16}$$

Sia ora $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Con un semplice cambiamento di variabili troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} v\,\tau_{-h}\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\tau_h v\,,$$

per ogni $h \neq 0$. Se $h \to 0$ allora $\tau_{-h}\varphi \to -(\nabla\varphi)\cdot\tau$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$, pertanto, passando al limite su $h = h(k)$ per $k \to \infty$ troviamo

$$-\int_{\mathbb{R}^n} v\,(\tau\cdot\nabla\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,w\,.$$

Applicando questo ragionamento a $\tau = e_i$, $1 \leq i \leq n$, denotando con w_i la funzione relativa alla direzione e_i, e ponendo infine $T = (w_1, ..., w_n)$, si è trovato che T è un gradiente debole di v su $\mathbb{R}^n$. Inoltre dalla (2.16) troviamo che

$$|\tau\cdot T(x)| \leq \mathrm{Lip}(v)\,,$$

per un insieme denso di direzioni $\tau \in S^{n-1}$ e per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$. Dunque $T \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e

$$\|T\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)} \leq \mathrm{Lip}(v)\,.$$

Poichè $\mathrm{Lip}(v) = \mathrm{Lip}(u;\Omega)$ e $u = v$ su Ω si è dunque provato che u ammette un gradiente debole in Ω con le proprietà desiderate.

Passo due: La condizione di Lipschitzianità implica che

$$\sup_\Omega |u| \leq |u(x)| + \mathrm{Lip}(u;\Omega)\mathrm{diam}(\Omega)\,, \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Pertanto se Ω è limitato allora u è limitata in Ω. In particolare, $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e si è provata la (i).

Passo tre: Assumiamo $u = 0$ su $\partial\Omega$ e dimostriamo che $\int_\Omega \nabla u = 0$. Definiamo $Zu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo

$$Zu(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \in \Omega\,,\\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,.\end{cases}$$

Grazie al fatto che $u = 0$ su $\partial\Omega$ si verifica facilmente che $Zu \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$. Per il passo uno, Zu ammette un gradiente debole su $\mathbb{R}^n$ e risulta $\nabla(Zu) \in L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Poichè Ω è limitato abbiamo che $(Zu)_\varepsilon = (Zu) \star \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\nabla(Zu)_\varepsilon = (\nabla(Zu))_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla(Zu)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Pertanto, scelto $R > 0$ tale che $\Omega \subset B_R$ troviamo

$$\int_{B_R} \nabla(Zu) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_R} (\nabla(Zu))_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_R} \nabla(Zu)_\varepsilon = 0\,,$$

dove si è applicata la (2.1) alle $(Zu)_\varepsilon$. Per convergenza dominata (su $R \to \infty$) si ha quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(Zu) = 0\,. \tag{2.17}$$

Concludiamo verificando che $\nabla(Zu) = 1_\Omega \nabla u$ q.o. su $\mathbb{R}^n$. Se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ allora

$$-\int_\Omega \varphi\nabla u = \int_\Omega u\nabla\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} Zu\,\nabla\varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\nabla(Zu) = -\int_\Omega \varphi\nabla(Zu)\,,$$

e quindi $\nabla(Zu) = \nabla u$ q.o. in Ω. D'altra parte per il Lemma 2.4 abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla(Zu) &= \nabla((Zu)^+) - \nabla((Zu)^-) = 1_{\{Zu>0\}}\nabla(Zu) + 1_{\{Zu<0\}}\nabla(Zu) \\ &= 1_{\{Zu\neq 0\}}\nabla(Zu) = 1_{\{Zu\neq 0\}}\nabla u\,. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che $\{Zu \neq 0\} \subset \Omega$, risulta allora $\nabla(Zu) = 0$ q.o. su $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. □

2.4.2. *Formulazione del problema di Dirichlet sulle funzioni Lipschitziane.* Passiamo adesso ad applicare i risultati della precedente sezione per precisare la formulazione del problema di Dirichlet sulla classe delle funzioni Lipschitziane. Considereremo sempre un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$. In questo modo, grazie all'osservazione 2.7 e al Lemma 2.9, ogni $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ si estenderà univocamente per continuità a $\overline{\Omega}$ e apparterrà a $W^{1,\infty}(\Omega)$. Introduciamo una funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$. Poichè f risulta localmente limitata su $\mathbb{R}^n$, il funzionale $F : \mathrm{Lip}(\Omega) \to [0,\infty)$ definito da

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx\,,$$

assume sempre valori finiti. Assegnata $u_0 \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ considereremo il problema di Dirichlet per il funzionale F,

$$m = \inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in \mathrm{Lip}(\Omega),\, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\}. \tag{2.18}$$

Dato $L > 0$, consideriamo il sottoinsieme convesso di $\mathrm{Lip}(\Omega)$,

$$\mathrm{Lip}_L(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \mathrm{Lip}(u;\Omega) \le L\}\,,$$

e iniziamo col dimostrare l'esistenza di minimi nel problema di Dirichlet ristretto a $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$.

Lemma 2.10. *Siano Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ e sia $L \ge \mathrm{Lip}(u_0;\partial\Omega)$. Allora il problema variazionale*

$$m(L) = \inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in \mathrm{Lip}_L(\Omega),\, u = u_0 \textit{ su } \partial\Omega\right\}, \tag{2.19}$$

ammette un minimo u_L*. Se inoltre* $\mathrm{Lip}(u_L;\Omega) < L$*, allora* u *è un minimo anche per il problema variazionale* (2.18).

Dimostrazione del Lemma 2.10: Passo uno: L'estensione di McShane di u_0 appartiene alla classe di competizione del problema (2.19), che è dunque non vuota. Possiamo allora considerare una successione minimizzante per il problema (2.19), i.e. $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}_L(\Omega)$, $v_h = u_0$ su $\partial\Omega$, $F(v_h) \to m(L)$ per $h \to \infty$. Le prime due condizioni, unite alla limitatezza di Ω, garantiscono che la successione $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ sia equi-Lipschitziana ed equi-limitata su $\overline{\Omega}$. Quindi esistono $h(k) \to \infty$ e una funzione $u_L \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ tali che $v_{h(k)} \to u_L$ uniformemente su $\overline{\Omega}$. In particolare $\mathrm{Lip}(u_L) \le L$ e $u_L = u_0$ su $\partial\Omega$. Pertanto u_L è ammissibile in (2.19), i.e.

$$m(L) \le F(u_L)\,.$$

D'altra parte, poichè $v_{h(k)} \to u_L$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dal Teorema 2.7 troviamo che

$$F(u_L) \le \liminf_{k\to\infty} F(v_{h(k)}) = \lim_{h\to\infty} F(v_h) = m(L)\,.$$

Dunque u_L è un minimo nel problema variazionale (2.19).

Passo due: Assumiamo adesso che risulti $\mathrm{Lip}(u_L;\Omega) < L$. Data $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ con $u = u_0$ su $\partial\Omega$ esiste sempre $t \in (0,1)$ tale che risulti

$$(1-t)\mathrm{Lip}(u_L;\Omega) + t\mathrm{Lip}(u;\Omega) \le L\,.$$

Dunque $\mathrm{Lip}((1-t)u_L + t\,u;\Omega) \le L$ e, inoltre, $(1-t)u_L + t\,u = u_0$ su $\partial\Omega$. La minimalità di u_L in (2.19) assicura allora che

$$F(u_L) \le F((1-t)u_L + t\,u) \le (1-t)F(u_L) + tF(u)\,,$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è applicata la convessità di f. In particolare abbiamo $t\,F(u_L) \le t\,F(u)$ e, poichè $t > 0$, si è dunque provato $F(u_L) \le F(u)$, come desiderato. □

Il Lemma 2.10 riduce la dimostrazione dell'esistenza di minimi per il problema (2.18) a quello della dimostrazione di stime a priori sulla costante di Lipschitz per i minimi del problema (2.19). La dimostrazione di queste stime richiederà l'assunzione di opportune ipotesi su Ω e sul dato al bordo u_0, che saranno motivate dalle osservazioni geometriche delle seguenti sezioni.

2.4.3. *Il principio del massimo.* Introduciamo adesso alcune definizioni che risultano utili nello studio dei minimi del funzionale $F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)$ (si veda la Figura 5).

Minimi: u è un minimo di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ se risulta $F(u) \le F(w)$ per ogni $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con

$$u = w \quad \text{su } \partial\Omega\,.$$

Super-minimi: u è un super-minimo di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ se risulta $F(u) \le F(w)$ per ogni $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con

$$u \le w \quad \text{su } \Omega\,, \qquad u = w \quad \text{su } \partial\Omega\,.$$

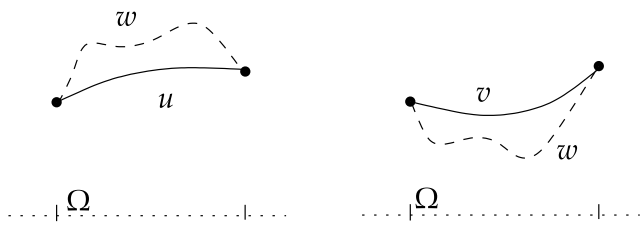


Figure 5. Super- e sub-minimalità. Consideriamo l'esempio fornito dal funzionale lunghezza $F(u) = \int_\Omega \sqrt{1+(u')^2}$ dove Ω è un intervallo di $\mathbb{R}$. Siano u super-minimo e v sub-minimo di F. Per super-minimalità u è concava. Per sub-minimalità v è convessa. Se dunque $u \geq v$ sul bordo di Ω allora $u \geq v$ in Ω. In dimensione $n \geq 2$ la super- e sub- minimalità non sono collegate alla concavità-convessità, tuttavia questo risultato di ordinamento dei minimi in base al dato bordo rimane valido (Teorema 2.12).

Sub-minimi: v è un sub-minimo di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ se risulta $F(v) \leq F(w)$ per ogni $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con

$$v \geq w \quad \text{su}\, \Omega\,, \qquad v = w \quad \text{su}\, \partial\Omega\,.$$

Parleremo semplicemente di minimi, super-minimi e sub-minimi di F qualora nelle definizioni precedenti si rilassi il vincolo $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ in $w \in \mathrm{Lip}(\Omega)$.

Osservazione 2.8. Chiaramente un minimo è anche sub- e super-minimo. Il viceversa si dimostra facilmente grazie al Corollario 2.5. Infatti data $v \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con $u = v$ su $\partial\Omega$ consideriamo $w_{min} = \min\{u, v\}$ e $w_{max} = \max\{u, v\}$. Poichè $w_{min} = w_{max} = u$ su $\partial\Omega$ per sub- e super-minimalità abbiamo rispettivamente $F(u) \leq F(w_{min})$ e $F(u) \leq F(w_{max})$. Grazie al Corollario 2.5 da $F(u) \leq F(w_{min})$ deduciamo

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \int_\Omega f(\nabla w_{min}) = \int_{\{u>v\}} f(\nabla v) + \int_{\{u\leq v\}} f(\nabla u)\,,$$

i.e.

$$\int_{\{u>v\}} f(\nabla u) \leq \int_{\{u<v\}} f(\nabla v)\,.$$

Similmente dalla $F(u) \leq F(w_{max})$ troviamo

$$\int_{\{u<v\}} f(\nabla u) \leq \int_{\{u>v\}} f(\nabla v)\,.$$

Poichè $\nabla u = \nabla v$ q.o. su $\{u = v\}$ concludiamo che $F(u) \leq F(v)$.

Nel caso in cui l'integrando f sia strettamente convesso possiamo dimostrare varie proprietà geometriche dei minimi di F. Ricordiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice strettamente convessa se

$$f(t\xi + (1-t)\eta) < tf(\xi) + (1-t)f(\eta)\,,$$

per ogni $t \in (0, 1)$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ con $\xi \neq \eta$.

Teorema 2.11. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa, $L > 0$, e se u e v sono minimi di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con $u = v$ su $\partial\Omega$, allora $u = v$ in Ω.*

Dimostrazione: Definiamo $w = (u+v)/2$, allora $w = u = v$ su $\partial\Omega$ e $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$. Consideriamo l'insieme misurabile $E = \{x \in \Omega : \nabla u(x) \neq \nabla v(x)\}$. Per stretta convessità di f abbiamo

$$f(\nabla w(x)) < \frac{f(\nabla u(x)) + f(\nabla v(x))}{2}, \quad \forall x \in E.$$

Se $|E| > 0$ allora risulterà

$$m \leq \int_\Omega f(\nabla w) < \frac{\int_\Omega f(\nabla u) + \int_\Omega f(\nabla v)}{2} = m.$$

Allora avremo necessariamente $|E| = 0$, i.e. $\nabla u = \nabla v$ q.o. in Ω. Dal Lemma 2.6 troviamo che $u - v$ è costante su ogni componente connessa di Ω. Poichè $u - v = 0$ su $\partial\Omega$ avremo quindi $u = v$ in Ω. □

Teorema 2.12 (Principio del massimo debole)**.** *Siano Ω un aperto limitato, $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ strettamente convessa e sia $L > 0$. Se u è un super-minimo di F in* $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$*, v è un sub-minimo di F in* $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ *e se*

$$u \geq v \quad su\ \partial\Omega,$$

allora

$$u \geq v \quad su\ \Omega.$$

Osservazione 2.9. Il teorema è falso senza l'ipotesi di stretta convessità. Ad esempio se $f(\xi) = \max\{0, |\xi| - L\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, allora f è convessa ma non strettamente convessa ed *ogni* funzione $u \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ è un minimo del corrispondente funzionale F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$. Un altro esempio è dato dal funzionale variazione totale

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|,$$

corrispondente a $f(\xi) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ad esempio nel caso $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, ogni funzione $u \in \mathrm{Lip}((0,1))$ monotona crescente (o decrescente) in $(0,1)$ risulta essere un minimo di F in $\mathrm{Lip}((0,1))$. Se infatti $v \in \mathrm{Lip}((0,1))$ e $v = u$ su $\{0,1\}$ allora

$$F(v) = \int_0^1 |v'| \geq \left| \int_0^1 v' \right| = |v(1) - v(0)| = |u(1) - u(0)| = \left| \int_0^1 u' \right| = \int_0^1 |u'| = F(u).$$

Dimostrazione del Teorema 2.12: Passo uno: Dimostriamo che $u \geq v$ in Ω. Consideriamo le funzioni Lipschitziane

$$w_{min} = \min\{u, v\}, \qquad w_{max} = \max\{u, v\}.$$

Chiaramente $w_{min}, w_{max} \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con $w_{min} = v$ e $w_{max} = u$ su $\partial\Omega$. Per sub-minimalità di v, ragionando come nell'osservazione 2.8, da $F(v) \leq F(w_{min})$ troviamo

$$\int_{\{u<v\}} f(\nabla v) \leq \int_{\{u<v\}} f(\nabla u).$$

Similmente per super-minimalità di u abbiamo $F(u) \leq F(w_{max})$, da cui

$$\int_{\{u<v\}} f(\nabla u) \leq \int_{\{u<v\}} f(\nabla v).$$

In conclusione

$$\int_{\{u<v\}} f(\nabla u) = \int_{\{u<v\}} f(\nabla v)\,. \tag{2.20}$$

L'insieme $A = \{x \in \Omega : u(x) < v(x)\}$ è aperto. Ragionando per contraddizione, supponiamo sia non vuoto. Se risultasse $\nabla u = \nabla v$ q.o. in A allora per il Lemma 2.6 $u - v$ sarebbe costante su ciascuna componente connessa di A. Poichè $\partial A \subset \{u = v\}$ risulterebbe allora $u - v = 0$ in A, e quindi $A = \emptyset$. Pertanto, posto

$$E = \{x \in A : \nabla u(x) \neq \nabla v(x)\}\,,$$

deve risultare $|E| > 0$. Inoltre la (2.20) diventa

$$\int_E f(\nabla u) = \int_E f(\nabla v)\,. \tag{2.21}$$

Consideriamo infine la funzione w definita ponendo

$$w = \begin{cases} (u+v)/2\,, & \text{su } A\,, \\ u\,, & \text{su } \Omega \setminus A\,. \end{cases}$$

Abbiamo $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con $w \geq u$ su Ω e $w = u$ su $\partial\Omega$ (infatti $A \cap \partial\Omega = \emptyset$). Per superminimalità di u troviamo $F(u) \leq F(w)$, e quindi $\int_E f(\nabla u) \leq \int_E f(\nabla w)$. In conclusione

$$\int_E f(\nabla u) \leq \int_E f(\nabla w) < \frac{1}{2}\left\{\int_E f(\nabla u) + \int_E f(\nabla v)\right\} = \int_E f(\nabla u)\,,$$

dove abbiamo applicato la stretta convessità di f, la definizione di E, il fatto che $|E| > 0$, e la (2.21). □

Corollario 2.13. *Siano Ω, f ed L come nel Teorema 2.12. Se u e v sono minimi di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ allora*

$$\sup_\Omega |u - v| \leq \sup_{\partial\Omega} |u - v|\,. \tag{2.22}$$

Inoltre vale la stima di Haar-Radó,

$$\mathrm{Lip}(u;\Omega) = \sup\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} : x \in \Omega\,, y \in \partial\Omega\right\}\,. \tag{2.23}$$

Osservazione 2.10. La stima (2.22) rafforza il risultato di unicità stabilito nel Teorema 2.11. La stima di Haar-Radò indica che un minimo assume la sua pendenza massima sul bordo di Ω.

Dimostrazione del Corollario 2.13: Passo uno: Dimostriamo la (2.22). Il funzionale è invariante per traslazioni verticali, cioè $F(w) = F(w + c)$ per ogni $w \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ e $c \in \mathbb{R}$. Poichè Ω è limitato, abbiamo che $\partial\Omega$ è compatto. Quindi

$$\sup_{\partial\Omega}(v - u) = \max_{\partial\Omega}(v - u) \in \mathbb{R}\,.$$

Possiamo allora traslare u verticalmente in modo che u domini v su $\partial\Omega$ e si possa quindi applicare il Teorema 2.12. Possiamo cioè considerare la funzione $w \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ definita da

$$w = u + \sup_{\partial\Omega}(v - u)\,,$$

e osservare come w sia un minimo di F in $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ tale che $v \le w$ su $\partial\Omega$. Per il Teorema 2.12 avremo allora $v \le w$ su Ω, i.e.

$$\sup_{\Omega}(v-u) \le \sup_{\partial\Omega}(v-u)\,.$$

Scambiando i ruoli di u e v si prova similmente che

$$\sup_{\Omega}(u-v) \le \sup_{\partial\Omega}(u-v)\,,$$

pervenendo quindi alla (2.22).

Passo due: Dimostriamo la (2.23) sfruttando l'invarianza del funzionale per traslazioni orizzontali. Più precisamente, dato $\tau \in \mathbb{R}^n$ poniamo $u_\tau(x) = u(x+\tau)$ e definiamo $\Omega_\tau = \Omega - \tau$. Per invarianza, u_τ è un minimo di F su $\mathrm{Lip}_L(\Omega_\tau)$. In particolare, sia u che u_τ sono minimi di F sull'aperto $\Omega \cap \Omega_\tau$, e per la (2.22) avremo allora

$$\sup_{\Omega\cap\Omega_\tau} |u-u_\tau| \le \sup_{\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)} |u-u_\tau|\,. \tag{2.24}$$

Presi dunque $x_1, x_2 \in \Omega$ con $x_1 \ne x_2$, poniamo $\tau = x_2 - x_1$ e osserviamo che $x_1, x_2 \in \Omega\cap\Omega_\tau$. Per la (2.24) troviamo $x_0 \in \partial(\Omega\cap\Omega_\tau)$ tale che

$$\sup_{\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)} |u-u_\tau| = |u(x_0) - u_\tau(x_0)|\,.$$

Dalla (2.24) avremo allora

$$\begin{aligned}\frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|} = \frac{|u(x_1)-u_\tau(x_1)|}{|\tau|} &\le \frac{1}{|\tau|}\sup_{\Omega\cap\Omega_\tau}|u-u_\tau| \\ &\le \frac{1}{|\tau|}\sup_{\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)}|u-u_\tau| = \frac{|u(x_0)-u(x_0+\tau)|}{|\tau|}\,.\end{aligned}$$

Poichè $\partial(\Omega\cap\Omega_\tau)$ è l'unione disgiunta degli insiemi

$$\Omega\cap\partial\Omega_\tau\,, \qquad \Omega_\tau\cap\partial\Omega \qquad \partial\Omega\cap\partial\Omega_\tau\,,$$

abbiamo necessariamente $x_0 \in \overline{\Omega}$ e $x_0+\tau \in \partial\Omega$ oppure $x_0 \in \partial\Omega$ e $x_0+\tau \in \overline{\Omega}$. Quindi la tesi segue per arbitrarietà di x_1 e x_2. □

Un'ulteriore importante ingrediente nello studio dei minimi del funzionale F è dato dalla seguente osservazione in cui, combinando la disuguaglianza di Jensen con il teorema di Gauss-Green, si dimostra che le funzioni affini sono sempre minimizzanti.

Lemma 2.14. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ convessa e sia $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione affine, i.e.*

$$v(x) = a + (\xi\cdot x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$$

per opportuni $a \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Allora v è un minimo di F in $\mathrm{Lip}(\Omega)$.

Dimostrazione: Ricordando che Ω ha misura finita e applicando la disuguaglianza di Jensen, troviamo

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u) \geq |\Omega| f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \nabla u\right).$$

D'altra parte applicando la (ii) del Lemma 2.9 alla funzione $u - v$ troviamo

$$\int_\Omega \nabla u = \int_\Omega \nabla v = |\Omega|\,\xi\,.$$

Pertanto $F(u) \geq |\Omega| f(\xi) = \int_\Omega f(\nabla v) = F(v)$, come desiderato. □

Combinando il Lemma 2.14 col Teorema 2.12 possiamo dimostrare questo interessante risultato sulla struttura dei minimi di un funzionale strettamente convesso.

Teorema 2.15. *Sia Ω un aperto limitato, sia $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ strettamente convessa, e sia $L > 0$. Se u è un minimo di F su $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ allora*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u\,, \qquad \forall x \in \Omega\,. \tag{2.25}$$

Inoltre nessun insieme di sopra o sotto livello non banale di u può risultare ben contenuto in Ω: più precisamente, se

$$\inf_{\partial\Omega} u < t < \sup_{\partial\Omega} u \tag{2.26}$$

allora le chiusure degli insiemi $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$ e $\{x \in \Omega : u(x) < t\}$ intersecano il bordo di Ω.

Dimostrazione: Passo uno: Per il Lemma 2.14 la funzione $v = \inf_\Omega u$ è un minimo di F in $\mathrm{Lip}(\Omega)$. Poichè $v \leq u$ su $\partial\Omega$, per il Teorema 2.12 troviamo $v \leq u$ su Ω. Ripetendo il ragionamento con $v = \sup_\Omega u$ si dimostra la (2.25).

Passo due: Sia t come in (2.26) e supponiamo che $\{u > t\}$ sia ben contenuto in Ω. Poniamo $v = \min\{t, u\}$, in modo da avere $v \in \mathrm{Lip}_L(\Omega)$ e $v = u$ su $\partial\Omega$. Poichè $u = v$ su $\partial\{u > t\}$, dal Lemma 2.14 troviamo

$$\int_{\{u>t\}} f(\nabla v) \leq \int_{\{u>t\}} f(\nabla u)\,.$$

Tenendo condo del fatto che $\nabla u = \nabla v$ q.o. su $\{u \leq t\}$, concludiamo che $F(v) \leq F(u)$. In particolare, v è un minimo di F su $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ con $v = u$ su $\partial\Omega$. Per il Teorema 2.11 abbiamo quindi $u = v$ in Ω, i.e. $u = t$ in Ω, assurdo. □

2.4.4. *La condizione di pendenza limitata.* Introduciamo adesso una condizione geometrica sul dato al bordo u_0 e sul dominio Ω che esprime l'esistenza di funzioni affini adatte ad essere confrontate con i minimi u di F che abbiano u_0 come dato al bordo.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $u_0 \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$. La coppia (Ω, u_0) soddisfa la *condizione di pendenza limitata* con costante M se per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste una coppia di funzioni affini w_z^+ e w_z^- con le seguenti proprietà:

(i) $w_z^+(z) = u_0(z) = w_z^-(z)$;
(ii) $w_z^+(x) \geq u_0(x) \geq w_z^-(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$;
(iii) $\mathrm{Lip}(w_z^+) \leq M$ e $\mathrm{Lip}(w_z^-) \leq M$.

Le funzioni w_z^+ e w_z^- sono le *barriere* di (Ω, u_0) relative al punto z. Dunque per ogni $z \in \partial\Omega$ troviamo due funzioni affini che coincidono con u_0 in z, che "ingabbiano" il grafico di u su $\partial\Omega$. Inoltre la pendenza di tali funzioni deve essere uniformemente limitata al variare di $z \in \partial\Omega$.

Osservazione 2.11. La condizione è banalmente verificata se il dato al bordo u_0 è la restrizione a $\partial\Omega$ di una qualche funzione affine (basterà prendere $w_z^+ = w_z^- = u_0$ per ogni $z \in \partial\Omega$).

Osservazione 2.12. Se (Ω, u_0) soddisfa la condizione di pendenza limitata con costante M allora $M \geq \mathrm{Lip}(u_0; \partial\Omega)$. Infatti se $x, y \in \partial\Omega$ allora

$$\begin{aligned} u_0(x) - u_0(y) &= w_x^-(x) - u_0(y) \leq w_x^-(x) - w_x^-(y) \leq M|x-y|\,, \\ u_0(y) - u_0(x) &= u_0(y) - w_x^+(x) \leq w_x^+(y) - w_x^-(x) \leq M|x-y|\,. \end{aligned}$$

Osservazione 2.13. Se (Ω, u_0) soddisfa la condizione di pendenza limitata con costante M, se Ω è limitato e se u_0 non coincide con la restrizione a $\partial\Omega$ di una funzione affine, allora Ω è convesso. Infatti, dato $z \in \partial\Omega$ siano w_z^+ e w_z^- le barriere relative a z. L'ipotesi fatta su u_0 combinata con la proprietà (ii) esclude che si possa avere $w_z^+ = w_z^-$ su $\mathbb{R}^n$. Pertanto

$$H_z = \{x \in \mathbb{R}^n : w_z^+(x) \geq w_z^-(x)\}\,,$$

è un semispazio chiuso di $\mathbb{R}^n$. Inoltre le proprietà (i) e (ii) assicurano che

$$z \in \partial H_z\,, \qquad \partial\Omega \subset H_z\,.$$

Poichè Ω è limitato deve essere $\Omega \subset H_z$ e quindi

$$\overline{\Omega} \subset \bigcap_{z \in \partial\Omega} H_z\,.$$

Denotiamo con K l'insieme convesso ottenuto come intersezioni dei semispazi H_z. Dalla (i) risulta $\partial\Omega \subset \partial K$, e poichè $\overline{\Omega} \subset K$ concludiamo $\overline{\Omega} = K$.

Introdurremo a breve una condizione sufficiente sulla coppia (Ω, u_0) affinchè la condizione di pendenza limitata sia verificata per un'opportuna constante $M = M(\Omega, u_0)$. Dimostraiamo prima come combinare la condizione di pendenza limitata con il principio del massimo debole al fine di provare l'esistenza di minimi Lipschitziani nel problema di Dirichlet associato ad F.

Teorema 2.16. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, e sia $u_0 \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ tale che la coppia (Ω, u_0) soddisfi la condizione di pendenza limitata con costante M. Allora il problema variazionale* (2.18) *ammette un minimo u soddisfacente* $\mathrm{Lip}(u; \Omega) \leq M$.

Dimostrazione: Passo uno: Assumiamo inizialmente che f sia strettamente convessa. La validità della condizione di pendenza limitata forza $M \geq \mathrm{Lip}(u_0; \partial\Omega)$. Dato $L > M$ possiamo dunque applicare il Lemma 2.10 e trovare un minimo u_L per F su $\mathrm{Lip}_L(\Omega)$ tale che risulti $u_L = u_0$ su $\partial\Omega$. Fissato $z \in \partial\Omega$, siano w_z^+ e w_z^- le barriere di (Ω, u_0) relative a

z. Per il Lemma 2.14 le barriere w_z^+ e w_z^- sono minimi di F in $\mathrm{Lip}_M(\Omega)$. Poichè u_L è un minimo di F in $\mathrm{Lip}_M(\Omega)$ e poichè $w_z^+ \geq u_0 = u_L \geq w_z^-$ su $\partial\Omega$, dal Teorema 2.12 abbiamo

$$w_z^+ \geq u_L \geq w_z^- \qquad \text{su } \Omega.$$

Per ogni $x \in \Omega$ abbiamo allora

$$u_L(x) - u_L(z) = u_L(x) - w_z^+(z) \leq w_z^+(x) - w_z^+(z) \leq M|x - z| \,.$$

Ragionando similmente con w_z^- al posto di w_z^+ concludiamo che

$$\sup\left\{\frac{|u_L(x) - u_L(z)|}{|x - z|} : x \in \Omega\right\} \leq M \,.$$

Poichè $z \in \partial\Omega$ è arbitrario la stima di Haar-Radó (2.23) implica $\mathrm{Lip}(u_L;\Omega) \leq M$. Poichè $M < L$, il Lemma 2.10 garantisce allora che $F(u_L) \leq F(v)$ per ogni $v \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ con $v = u_0$ su $\partial\Omega$, come desiderato.

Passo due: Discutiamo infine il caso in cui f è soltanto convessa. Dato $\varepsilon > 0$ definiamo

$$f_\varepsilon(\xi) = f(\xi) + \varepsilon|\xi|^2 \,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \,,$$

e denotiamo con F_ε il funzionale definito da f_ε. Poichè f_ε è strettamente convessa per ogni $\varepsilon > 0$, per il passo uno esiste una famiglia di funzioni $\{u_\varepsilon\}_{e>0} \subset \mathrm{Lip}_M(\Omega)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ risulti $u_\varepsilon = u_0$ su $\partial\Omega$ e u_ε sia un minimo di F_ε in $\mathrm{Lip}(\Omega)$. Dunque $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia equi-limitata ed equi-Lipschitziana su $\overline{\Omega}$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esistono una successione $\varepsilon_h \to 0^+$ e una funzione u tali che $u_{\varepsilon_h} \to u$ uniformemente su $\overline{\Omega}$. Chiaramente $\mathrm{Lip}(u) \leq M$. Inoltre, data $v \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ con $v = u_0$ su $\partial\Omega$, per il Teorema 2.7 troviamo

$$F(u) \leq \liminf_{h\to\infty} F(u_{\varepsilon_h}) \leq \liminf_{h\to\infty} F_{\varepsilon_h}(u_{\varepsilon_h}) \leq \liminf_{h\to\infty} F_{\varepsilon_h}(v) = F(v) \,.$$

Pertanto u è un minimo di F su $\mathrm{Lip}(\Omega)$, come desiderato. □

Osservazione 2.14. La semplice convessità di Ω non è ancora una condizione sufficiente alla validità della condizione di pendenza limitata per (Ω, u_0) con u_0 non affine. Ad esempio, $\partial\Omega$ non può avere parti piatte. Si ponga infatti

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \,, x_1 > 0\} \,, \qquad u_0(x) = \begin{cases} x_2^2 \,, & \text{se } x_1 = 0 \,, \\ 1 \,, & \text{se } x_1 > 0 \,, \end{cases} \qquad x \in \partial\Omega \,.$$

Se valesse la condizione di pendenza limitata, allora applicandola in $z = (0,0)$ troveremmo una funzione affine w tale che $w(0,0) = 0$ (i.e. $w(x) = ax_1 + bx_2$) e $w \leq u_0$ su $\partial\Omega$. Testando quest'ultima condizione nei punti $x = (0,1)$ e $x = (0,-1)$ troveremmo allora $a \geq 1$ e $-a \geq 1$, assurdo. In realtà, nemmeno la stretta convessità di Ω risulta sufficiente. Poniamo ad esempio

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 < x_2 < 2 - x_1^2\} \,, \qquad u_0(x) = x_1^2 \,.$$

La condizione di pendenza limitata applicata in $z = (0,0)$ implicherebbe nuovamente l'esistenza di una funzione affine w del tipo $w(x) = ax_1 + bx_2$ tale che risulti $w \geq u_0$ su $\partial\Omega$. Testando questa disuguaglianza sulla curva $\{(t,t^4) : |t| < 1\}$ si troverebbe allora

$$at + bt^4 \geq t^2\,, \qquad \forall t \in (-1,1)\,,$$

che, come si verifica facilmente, è contraddittoria per ogni scelta di a e b.

Dato un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, diremo che Ω è uniformemente convesso se esiste una costante $\kappa(\Omega)$ con la seguente proprietà: per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste un iperpiano T_z in $\mathbb{R}^n$ tale che $z \in T_z$ e

$$\kappa(\Omega)|x - z|^2 \leq \mathrm{dist}(x, T_z)\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,. \tag{2.27}$$

Nel seguente lemma dimostriamo che l'uniforme convessità è una condizione sufficiente ad assicurare la validità della condizione di pendenza limitata per ogni $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.17. *Se Ω è uniformemente convesso con costante $\kappa(\Omega)$ e se $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora (Ω, u_0) soddisfa la condizione di pendenza limitata con costante M data dalla formula*

$$M = \sup_\Omega |\nabla u_0| + \frac{\sup_\Omega |\nabla^2 u_0|}{\kappa(\Omega)}\,.$$

Dimostrazione: Fissiamo $z \in \partial\Omega$ e costruiamo una coppia di funzioni affini con le properietà desiderate. A meno di compiere un moto rigido possiamo supporre $z = 0$ e $T_z = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, di modo che risulti $\mathrm{dist}(x, T_z) = x_n$. In particolare dalla (2.27) avremo

$$\kappa(\Omega)|x|^2 \leq x_n\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,. \tag{2.28}$$

Consideriamo poi le funzioni affini $\{w_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ del tipo

$$w_a(x) = u_0(0) + \nabla u_0(0) \cdot x + a\, x_n\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ci basterà trovare a^+ e a^- tali che risulti

$$w_{a^+}(0) = u_0(0) = w_{a^-}(0)\,, \tag{2.29}$$

$$w_{a^+}(x) \geq u_0(x) \geq w_{a^-}(x)\,, \qquad \forall x \in \partial\Omega\,, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{Lip}(w_{a^+}) \leq M\,, \qquad \mathrm{Lip}(w_{a^-}) \leq M\,. \tag{2.31}$$

La condizione (2.29) è banalmente verificata per ogni $a \in \mathbb{R}$. Supponiamo ora che per un certo $a \in \mathbb{R}$ e per un qualche $x \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ risulti $w_a(x) = u_0(x)$. Per il Teorema di Lagrange esiste allora y appartenente al segmento di estremi 0 ed x tale che

$$a = \frac{u_0(x) - u_0(0) - \nabla u_0(0) \cdot x}{x_n} = \frac{(\nabla^2 u_0(y)x) \cdot x}{2x_n}\,,$$

e quindi, tenendo conto della (2.28), abbiamo necessariamente

$$|a| \leq \frac{\sup_\Omega |\nabla^2 u_0(0)|}{2} \frac{|x|^2}{x_n} \leq \frac{\sup_\Omega |\nabla^2 u_0(0)|}{2\kappa(\Omega)}\,.$$

Ponendo dunque

$$a^+ = \frac{\sup_\Omega |\nabla^2 u_0(0)|}{\kappa(\Omega)}\,, \qquad a^- = -a^+\,,$$

si verifica immediatamente la validità di (2.30). Compiuta questa scelta, la validità di (2.31) è automatica. □

Combinando il Teorema 2.16 con il precedente lemma perveniamo al risultato di esistenza conclusivo di questa sezione.

Teorema 2.18. *Sia Ω un aperto limitato e uniformemente convesso con costante $\kappa(\Omega)$, sia $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ convessa. Il problema variazionale*

$$\inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in \mathrm{Lip}(\Omega),\, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\}\,,$$

ammette un minimo u che soddisfa le stime

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}(u;\Omega) &\le \sup_\Omega |\nabla u_0| + \frac{\sup_\Omega |\nabla^2 u_0|}{\kappa(\Omega)}\,, \\ \sup_\Omega |u| &\le \sup_{\partial\Omega} |u_0|\,. \end{aligned}$$

Inoltre, se f è strettamente convessa, allora tale minimo è unico.

Osservazione 2.15. Il Teorema 2.18 si applica anche agli integrandi f non strettamente convessi considerati nell'osservazione 2.9. Nel caso del funzionale variazione totale su un intervallo di $\mathbb{R}$ avevamo visto come ogni funzione Lipschitziana monotona fosse un minimo. In questa situazione il Teorema 2.18 mostra l'esistenza di un minimo (fra i tanti possibili) che soddisfi delle buone stime di regolarità.

Osservazione 2.16. Questo è un teorema di particolare interesse, perchè dimostra al contempo l'esistenza dei minimi e la validità di alcune stime di regolarità. Tuttavia il teorema richiede ipotesi abbastanza restrittive sul dominio Ω e sul dato al bordo u_0. Inoltre la dimostrazione utilizzata non si adatta a trattare altri tipi di problemi di minimo, come quelli con vincolo di volume. Nelle successive sezioni approfondiremo lo studio degli spazi $W^{1,p}(\Omega)$ con $p < \infty$. In questo modo svilupperemo gli strumenti utili a dimostrare teoremi di esistenza di minimi per problemi variazionali ambientati su aperti generici, sia con condizioni al bordo di Dirichlet che con vincoli di volume. Nell'ottenere questi risultati di esistenza dovremmo tuttavia assumere la coercività superlineare dell'integrando f, ovvero l'esistenza di costanti $C > 0$ e $p > 1$ tali che risulti

$$f(\xi) \ge \frac{|\xi|^p}{C} - C\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Questo tipo di condizione escluderà dalla teoria il funzionale dell'area $F(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}$, in quanto associato all'integrando $f(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$, che soddisfa la suddetta condizione di coercività su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $p = 1$. Dunque, nel caso del funzionale dell'area, l'unico risultato di esistenza che avremo a disposizione sarà quello del Teorema 2.18, con le sue condizioni di ammissibilità sui domini e i dati al bordo. Sebbene

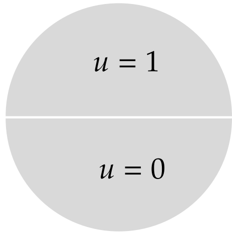


FIGURE 6. Una funzione $W^{1,p}(\Omega)$ che non può essere approssimata in $W^{1,p}(\Omega)$ con funzioni appartenenti a $C^\infty(\overline{\Omega})$.

non approfondiremo lo studio delle condizioni ottimali da imporre ai fini di ottenere l'esistenza dei minimi nel problema di Dirichlet per il funzionale dell'area, verificheremo con degli esempi come sia effettivamente necessario imporre delle condizioni.

Esempio 2.4 (Non esistenza di grafici di area minima, I)**.** Consideriamo l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definito da $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$ e dimostriamo che il problema di Dirichlet

$$m = \inf\left\{ \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} : u \in \mathrm{Lip}(\Omega),\, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega \right\},$$

per il dato al bordo $u_0 \in \mathrm{Lip}(\partial\Omega)$ definito da

$$u_0(x) = \begin{cases} 0\,, & |x| = 1\,, \\ M\,, & |x| = 0\,, \end{cases}$$

ha minimi in $\mathrm{Lip}(\Omega)$ se e solo se $M = 0$. Infatti se $M > 0$ e $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ è ammissibile, necessariamente $E = \{x \in \Omega : \nabla u(x) \neq 0\}$ ha misura positiva. Pertanto $\sqrt{1 + |\nabla u|^2} > 1$ su E e risulta quindi $F(u) > |\Omega| = \pi$. D'altra parte la successione di funzioni $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}(\Omega)$ definita da

$$u_h(x) = \begin{cases} M(1 - h|x|)\,, & 0 < |x| < h^{-1}\,, \\ 0\,, & h^{-1} < |x| < 1\,, \end{cases}$$

soddisfa $F(u_h) \to \pi$ per $h \to \infty$. Quindi $m = \pi$ ma $F(u) > m$ per ogni u ammissibile, e pertanto non possono esistere minimi. Nel caso $M = 0$ abbiamo chiaramente che l'unico minimo del problema è dato invece da $u = 0$. Osserviamo infine come l'aperto considerato sia in qualche modo degenere, in quanto il suo bordo non coincide con una curva regolare. Nell'esempio 2.8 vedremo tuttavia come un analogo fenomeno di non-esistenza si possa incontrare su aperti con bordo regolare.

2.5. **Teorema di Meyers-Serrin.** A partire da questa sezione riprendiamo uno studio generale degli spazi di Sobolev, volto ad implementare il Metodo Diretto in situazioni lasciate fuori dalla precedente analisi. Iniziamo dimostrando un risultato di approssimazione per le funzioni di Sobolev in termini di funzioni infinitamente derivabili.

Teorema 2.19 (Teorema di Meyers-Serrin)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $p \in [1, \infty)$. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0\,.$$

Osservazione 2.17. Il teorema di Meyers-Serrin dimostra che $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$. Si osservi che $C^\infty(\Omega)$, a differenza di $C^\infty(\overline{\Omega})$, non è *mai* contenuto in $W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, senza ulteriori ipotesi su Ω non è possibile dimostrare un enunciato analogo dove $C^\infty(\Omega)$ viene rimpiazzato da $C^\infty(\overline{\Omega})$. Si consideri ad esempio l'aperto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\,, x_n \neq 0\}\,,$$

corrispondente alla palla unitaria meno un'iperpiano passante per l'origine. Posto

$$u(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x_n > 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x_n < 0\,, \end{cases}$$

è evidente che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p \in [1,\infty)$, con gradiente distribuzionale *nullo* su Ω. Supponiamo che esista una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{B})$ tale che risulti $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Data una qualunque funzione $\varphi \in C^\infty_c(B)$ e tenendo conto del fatto che $|B \setminus \Omega| = 0$, avremmo allora

$$\int_{\{x:x_n>0\}} \nabla\varphi = \int_\Omega u\nabla\varphi = \lim_{h\to\infty}\int_B u_h\nabla\varphi = -\lim_{h\to\infty}\int_B \varphi\nabla u_h = -\int_\Omega \varphi\nabla u = 0\,.$$

Dal teorema della divergenza potremmo allora concludere che

$$0 = \int_{\{x:x_n=0\}} \varphi\, \nu_{\{x_n>0\}}\, d\mathcal{H}^{n-1} = -e_n \int_{\{x:x_n=0\}} \varphi\, d\mathcal{H}^{n-1}\,,$$

i.e. $0 = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x',0)dx'$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(B)$, contraddizione (si confronti questo esempio con quello fatto nell'osservazione 2.2).

Osservazione 2.18. Premettiamo alla dimostrazione del teorema di Meyers-Serrin alcune considerazioni relative alle partizioni dell'unità. Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento numerabile di Ω con aperti ben contenuti in Ω, i.e.

$$\Omega_k \subset\subset \Omega\,, \qquad \Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k\,. \tag{2.32}$$

Assumiamo che il ricoprimento $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di Ω sia *localmente finito*, cioè che per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ risulti

$$I(\Omega') = \inf\{N \in \mathbb{N} : \Omega' \cap \Omega_k = \emptyset\,, \quad \forall k > N\} < \infty\,. \tag{2.33}$$

Allora esiste una *partizione dell'unità in Ω subordinata a $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$*, cioè esiste una successione di funzioni $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $0 \le \zeta_k \le 1$, $\zeta_k \in C^\infty_c(\Omega_k)$ e

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \zeta_k(x) = 1\,, \qquad \forall x \in \Omega\,. \tag{2.34}$$

La dimostrazione di questo fatto si divide in tre passi.

Passo uno: Dato un aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ poniamo $A^\varepsilon = \{x \in A : \mathrm{dist}(x,\partial A) > \varepsilon\}$. Ragionando per contraddizione si dimostra l'esistenza di $\varepsilon > 0$ tale che $\{\Omega_0^\varepsilon\} \cup \{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ è ancora un ricoprimento numerabile di Ω con aperti ben contenuti in Ω;

Passo due: Iterando il passo uno e ragionando per contraddizione, si costruisce una successione $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri positivi tali che $\{\Omega_k^{\varepsilon_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di Ω con aperti ben contenuti in Ω;

Passo tre: Posto $\Omega'_k = \Omega_k^{\varepsilon_k}$, si scelga infine $\eta_k \in C_c^\infty(\Omega_k)$ tale che $0 \le \eta_k \le 1$ e $\eta_k = 1$ su Ω'_k (basterà prendere η_k una regolarizzata di $1_{\Omega'_k}$ di passo abbastanza piccolo). Per ogni ogni $x \in \Omega$ definiamo allora una funzione $\eta : \Omega \to [0,\infty]$ ponendo

$$\eta(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \eta_k(x)\,, \qquad x \in \Omega\,.$$

In virtù di (2.33), dato $\Omega' \subset\subset \Omega$ abbiamo che in realtà

$$\eta(x) = \sum_{k=0}^{I(\Omega')} \eta_k(x) \in (0,\infty)\,, \qquad \forall x \in \Omega'\,,$$

e quindi $\eta \in C^\infty(\Omega')$. Dunque $\eta \in C^\infty(\Omega)$ e $\eta > 0$ su Ω. Posto allora

$$\zeta_k(x) = \frac{\eta_k(x)}{\eta(x)}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

si conclude la costruzione della partizione dell'unità desiderata.

Dimostrazione del Teorema 2.19. Dimostreremo che, per ogni $\varepsilon > 0$, si trova $v \in C^\infty(\Omega)$ tale che $\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < 2\varepsilon$. Consideriamo una costante $c > 0$ tale che risulti $\Omega_0 = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > c\} \neq \emptyset$, e definiamo per $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$

$$\Omega_k = \left\{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \ge \frac{c}{k}\right\}\,,$$

in modo che risulti Ω_k aperto non vuoto per ogni $k \in \mathbb{N}$. Corrispondentemente definiamo una famiglia di aperti $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ponendo

$$A_0 = \Omega_2\,, \qquad A_k = \Omega_{k+2} \setminus \overline{\Omega_k} \quad (k \ge 1)\,.$$

Ovviamente $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $A_k \subset\subset \Omega$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e ciascun A_k interseca al più tre elementi da $\{A_h\}_{h\in\mathbb{N}}$. In particolare per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ risulta

$$I(\Omega') = \inf\{N \in \mathbb{N} : \Omega' \cap A_k = \emptyset\,, \quad \forall k > N\} < \infty\,.$$

Pertanto esiste una famiglia di funzioni $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con le proprietà che $\zeta_k \in C_c^\infty(A_k)$, $0 \le \zeta_k \le 1$, e inoltre

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \zeta_k(x) = 1\,, \quad \forall x \in \Omega\,. \tag{2.35}$$

In virtù del lemma 2.3, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione $u\zeta_k$ appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, con $\mathrm{spt}(u\zeta_k) \subset\subset A_k$. Fissato $\varepsilon > 0$ possiamo dunque trovare una successione $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che, indicata con $(u\zeta_k)_{\varepsilon_k} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ la ε_k-regolarizzata di $u\zeta_k$, risulti

$$\|(u\zeta_k)_{\varepsilon_k} - (u\zeta_k)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le \frac{\varepsilon}{2^k}\,, \tag{2.36}$$

$$\mathrm{spt}((u\zeta_k)_{\varepsilon_k}) \subset\subset A_k\,. \tag{2.37}$$

Definiamo allora una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ponendo

$$v(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (u\zeta_k)_{\varepsilon_k}(x)\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Si osservi che la definizione è ben posta. Dato infatti Ω' ben contenuto in Ω, per ogni $x \in \Omega'$ la serie che definisce $v(x)$ è in realtà una somma finita sugli indici $0 \le k \le I(\Omega')$. Pertranto, $v \in C^\infty(\Omega)$. Similmente, poichè $u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u\zeta_k$, troviamo

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega')} \le \sum_{k=0}^{I(\Omega')} \|(u\zeta_k)_{\varepsilon_k} - (u\zeta_k)\|_{W^{1,p}(\Omega')} \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon\,.$$

Per arbitrarietà di Ω', si ha $\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 2\varepsilon$, come desiderato. □

Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ il teorema di Meyers-Serrin vale in una forma più forte e con una dimostrazione più semplice.

Lemma 2.20. *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Allora esiste una successione $u_h \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Dato $R > 0$, sia $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione tale che

$$1_{B_R} \le \zeta_R \le 1_{B_{R+2}}\,, \quad |\nabla\zeta_R| \le 1\,.$$

Dal Lemma 2.3 abbiamo $v_R = \zeta_R\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{spt} v_R \subset B_{R+2}$. Dunque le ε-regolarizzate $(v_R)_\varepsilon = v_{R,\varepsilon}$ soddisfano $v_{R,\varepsilon} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, con

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|v_{R,\varepsilon} - v_R\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 0\,.$$

Provando che

$$\lim_{R\to\infty} \|v_R - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 0\,, \tag{2.38}$$

non rimarrà che costruire u_h scegliendo una successione diagonale $R_h \to \infty$, $\varepsilon_h \to 0$. Dimostriamo quindi la (2.38). Da una parte abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |v_R - u|^p &= \int_{B_{R+2}\setminus B_R} |v_R - u|^p + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+2}} |u|^p \\
&= \int_{B_{R+2}\setminus B_R} (1-\zeta_R)^p |u|^p + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+2}} |u|^p \le \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |u|^p \to 0\,,
\end{aligned}$$

per $R \to \infty$, in quanto $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Inoltre dal Lemma 2.3 abbiamo che $\nabla v_R = u\,\nabla\zeta_R + \zeta_R\,\nabla u$, quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_R - \nabla u|^p &= \int_{B_{R+2}\setminus B_R} |\nabla v_R - \nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+2}} |\nabla u|^p \\
&\le 2^{p-1} \int_{B_{R+2}\setminus B_R} \left\{(1-\zeta_R)^p |\nabla u|^p + |u|^p |\nabla\zeta_R|^p\right\} + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R+2}} |\nabla u|^p \\
&\le 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |u|^p + |\nabla u|^p \to 0\,,
\end{aligned}$$

per $R \to \infty$, in quanto $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

2.6. **Funzioni di Sobolev su $\mathbb{R}$.** La teoria delle funzioni di Sobolev è estremamente più semplice in dimensione $n = 1$ che in dimensione $n \geq 2$. Inanzitutto, poichè ogni aperto Ω di $\mathbb{R}$ è unione numerabile di intervalli aperti disgiunti, possiamo ridurci direttamente a considerare lo spazio $W^{1,p}((a,b))$, per (a,b) intervallo aperto di $\mathbb{R}^n$ (i.e. $-\infty \leq a < b \leq \infty$). In questo caso vale il seguente teorema.

Teorema 2.21. *Se $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \leq p < \infty$, allora risulta*

$$u(x) - u(y) = \int_{(x,y)} u'(t)dt\,, \tag{2.39}$$

per ogni $(x,y) \subset (a,b)$, e in particolare esiste una funzione $\overline{u}$ uniformemente continua su $[a,b]$ tale che risulti $\overline{u} = u$ q.o. in (a,b). Se inoltre $1 < p < \infty$ allora $\overline{u} \in C^{0,\alpha}((a,b))$ per $\alpha = 1-(1/p)$, con

$$[\overline{u}]_{\alpha,(a,b)} \leq \|u'\|_{L^p((a,b))}\,.$$

Dimostrazione: Definiamo $v : (a,b) \to \mathbb{R}$ ponendo

$$v(x) = \int_{(a,x)} u'(t)dt\,, \quad x \in (a,b)\,.$$

Se $(x,y) \subset (a,b)$ allora

$$|v(x) - v(y)| \leq \int_{(x,y)} |u'|\,.$$

Nel caso $p = 1$, per assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, troviamo dunque che v è uniformemente continua su $[a,b]$. Se poi $1 < p < \infty$, per Hölder abbiamo

$$|v(x) - v(y)| \leq \|u'\|_{L^p((a,b))}|x-y|^{1-(1/p)}\,,$$

e dunque $v \in C^{0,\alpha}((a,b))$ con $[v]_{\alpha,(a,b)} \leq \|u'\|_{L^p((a,b))}$. Concludiamo la dimostrazione del teorema dimostrando l'esistenza di una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $v = u + c$ q.o. in (a,b). A tal fine, in virtù del Lemma 2.6, ci basterà verificare che $v \in W^{1,1}((a,b))$ con derivata debole $v' = u'$ q.o. in (a,b). Sia dunque $\varphi \in C^\infty_c((a,b))$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)} v(x)\varphi'(x)dx &= \int_{(a,b)} \varphi'(x)dx \int_{(a,x)} u'(t)dt \\
&= \int_{(a,b)} u'(t)dt \int_{(t,b)} \varphi'(x)dx = \int_{(a,b)} u'(t)(\varphi(b) - \varphi(t))dt\,.
\end{aligned}$$

Poichè $\varphi(b) = 0$ (si noti che potrebbe essere $b = +\infty$), dalla definizione di derivata debole troviamo

$$\int_{(a,b)} v\varphi' = -\int_{(a,b)} u'\varphi\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c((a,b))\,,$$

e quindi $u' = v'$ q.o. in (a,b), come desiderato. □

Osservazione 2.19. Riguardo al caso $1 < p < \infty$, si osservi che lo spazio $W^{1,p}((a,b))$ non coincide mai con lo spazio delle funzioni α-Höleriane, $\alpha = 1 - (1/p)$. Infatti è possibile costruire (con una variante della classica costruzione delle scala di Cantor) una funzione u che risulti crescente ed α-Hölderiana sull'intervallo $(0,1)$, con $u(0) = 0$,

$u(1) = 1$, e tale che la derivata classica di u esista q.o. in $(0,1)$ e si annulli. Se tale funzione appartenesse ad uno spazio di Sobolev $W^{1,p}(0,1)$ allora la sua derivata distribuzionale dovrebbe essere q.o. nulla, e questo porterebbe ad una contraddizione col teorema fondamentale del calcolo (2.39).

Osservazione 2.20. Dalla precedente dimostrazione segue che se $u \in W^{1,p}((a,b))$ per $p \in (1,\infty)$ allora il modulo di continuità di u su (a,b),

$$\omega(r) = \sup\{|u(x) - u(y)| : x, y \in (a,b)\,, |x-y| \le r\}\,, \qquad r > 0\,,$$

soddisfa la stima

$$\omega(r) \le r^{1-(1/p)} \sup\left\{\left(\int_E |u'|^p\right)^{1/p} : |E| \le r\right\}\,, \qquad \forall r > 0\,.$$

In particolare, $\omega(r) = o(r^{1-(1/p)})$ per $r \to 0^+$. Dunque le funzioni in $W^{1,p}((a,b))$ sono sempre un *pò più regolari* delle semplici funzioni α-Hölderiane con $\alpha = 1-(1/p)$. Verificare ad esempio che, per ogni $p \in (1,\infty)$, posto $u(x) = |x|^{1-(1/p)}$ ($x \in \mathbb{R}$), risulta $u \in W^{1,q}((-1,1))$ se e solo se $q \in [1,p)$.

Osservazione 2.21. A partire dal Teorema 2.21 non è difficile implementare il Metodo Diretto per risolvere problemi variazionali su funzioni di una variabile reale. Nel seguito ci concentreremo principalmente sul caso $n \ge 2$, lasciando al lettore l'utile esercizio di adattare o riformulare i vari risultati proposti nel contesto unidimensionale, e riferendoci a [3] per un analisi più dettagliata di questi problemi.

2.7. **I teoremi di Morrey e Sobolev.** Così come accade in dimensione $n = 1$, anche quando $n \ge 2$ una funzione nello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, in virtù della sommabilità L^p del suo gradiente debole, gode di proprietà di regolarità maggiori della mera appartenenza ad L^p. Maggiore il valore di p, maggiore il grado di regolarità delle funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Come visto in precedenza, le funzioni $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ sono equivalenti alle funzioni in $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$. Quando $p \in (n,\infty)$ si ha l'equivalenza con funzioni Hölderiane di esponente $1-(n/p)$ (Teorema di Morrey); quando $p = n$ si ha l'appartenza ad $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in (1,\infty)$ (Corollario 2.24); infine quando $p \in [1,n)$ si ha una importante proprietà di maggiore sommabilità (disuguaglianza di Sobolev). Dopo aver dimostrato tali risultati, concluderemo questa sezione introducendo la nozione di gradiente debole di ordine superiore, che risulterà utile nell'ultimo capitolo delle dispense.

Teorema 2.22 (Teorema di Morrey). *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p > n$. Allora esiste $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = 1-(n/p)$, tale che $\overline{u} = u$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ e inoltre*

$$|\overline{u}(x)| \le C(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.40}$$

$$|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \le C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x-y|^\alpha\,, \tag{2.41}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Passo uno: Consideriamo inizialmente una funzione $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, prendiamo $x \in \mathbb{R}^n$, e dimostriamo la seguente stima per la sua oscillazione integrale:

$$\frac{1}{r^n}\int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dz \le C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} r^{1-(n/p)}\,. \tag{2.42}$$

Questa stima quantifica il decadimento dell'oscillazione integrale in termini del raggio e della norma L^p del gradiente della funzione. E' decisivo il fatto che $p > n$, in quanto la costante trovata $C(n,p) \to \infty$ per $p \to n^+$.

In coordinate polari otteniamo

$$\int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dx = \int_0^r t^{n-1}dt \int_{S^{n-1}} |u(x)-u(x+t\nu)|d\mathcal{H}^{n-1}(\nu)\,. \tag{2.43}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo,

$$|u(x)-u(x+t\nu)| \le \int_0^t |\nabla u(x+s\nu)|ds\,,$$

che integrata su S^{n-1} porta

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |u(x)-u(x+t\nu)|d\mathcal{H}^{n-1}(\nu) &= \int_{S^{n-1}} d\mathcal{H}^{n-1}(\nu)\int_0^t \frac{|\nabla u(x+s\nu)|}{s^{n-1}}\, s^{n-1}ds \\ &= \int_{B_t(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,dz\,.\end{aligned}$$

Tornando alla (2.43) troviamo allora

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dx &= \int_0^r t^{n-1}dt \int_{B_t(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,dz \\ &\le \frac{r^n}{n}\int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,dz\,. \end{aligned}\tag{2.44}$$

Poichè $p > n$ risulta

$$\left(\int_{B_r(x)} \frac{dz}{|x-z|^{(n-1)p'}}\right)^{1/p'} = C(n,p)r^{1-(n/p)}\,,$$

pertanto applicando la disuguaglianza di Hölder in (2.44) troviamo la (2.42).

Passo due: Dimostriamo le stime (2.40) e (2.41) per una funzione $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ come conseguenza della (2.42). Preso un qualunque $e \in \partial B$, poniamo $\kappa(n) = |B \cap B(e)|$. In questo modo, presi $x, y \in \mathbb{R}^n$ e posto $r = |x-y|$ risulterà $|B_r(x) \cap B_r(y)| = \kappa(n)r^n$. Applicando (2.42) troviamo allora

$$\begin{aligned}\kappa(n)r^n|u(x)-u(y)| &\le \int_{B_r(x)\cap B_r(y)} |u(x)-u(z)| + |u(z)-u(y)|dz \\ &\le \int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dz + \int_{B_r(y)} |u(z)-u(y)|dz \\ &\le r^nC(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}r^{1-(n/p)} + r^nC(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(y))}r^{1-(n/p)} \\ &\le r^nC(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}r^{1-(n/p)}\,,\end{aligned}$$

che porta alla (2.40) per la u. Similmente

$$\begin{aligned} |B|r^n|u(x)| &\leq \int_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|dz + \int_{B_r(x)} |u(z)|dz \\ &\leq r^n C(n,p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} r^{1-(n/p)} + \|u\|_{L^p(B_r(x))}(|B|r^n)^{1/p'}\,, \end{aligned}$$

che per $r = 1$ porta alla (2.41) per la u.

Passo tre: Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e sia $u_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Per il passo due,

$$|u_h(x)| \leq C(n,p)\|u_h\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.45}$$

$$|u_h(x) - u_h(y)| \leq C(n,p)\|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x-y|^\alpha\,, \tag{2.46}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Poichè $\|u_h\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$, le u_h formano una successione equicontinua ed equilimitata in $\mathbb{R}^n$. Per il criterio di Ascoli-Arzelà, a meno di estrarre sottosuccessioni, convergono uniformemente sui compatti ad una funzione $\overline{u}$ che, da una parte, coincide q.o. con u grazie al fatto che $u_h \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$; dall'altra soddisfa le (2.40) e (2.41) in virtù delle (2.45) e (2.46). □

Teorema 2.23 (Disuguaglianza di Sobolev)**.** *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [1,n)$, $n \geq 2$. Allora $u \in L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)$ dove*

$$p^\star = \frac{np}{n-p}\,,$$

e in particolare

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p(n-1)}{n-p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.47}$$

Osservazione 2.22. L'esponente $p^\star$ è l'unico esponente $q \in [1,\infty)$ per cui una disuguaglianza del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,q)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.48}$$

può essere vera per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Se infatti poniamo $\tau_\lambda u(x) = u(\lambda\, x)$ per $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, allora troviamo che

$$\|\tau_\lambda u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^q\right)^{1/q} = \lambda^{-n/q}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\,,$$

$$\|\nabla\tau_\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\lambda^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|\lambda\,\nabla u|^p\right)^{1/p} = \lambda^{1-(n/p)}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Applicando (2.48) sulla famiglia di funzioni riscalate $\{\tau_\lambda u\}_{\lambda>0}$ troveremmo allora

$$\lambda^{-n/q}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{1-(n/p)}\,C(n,p,q)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,, \qquad \forall\lambda > 0\,.$$

Necessariamente $\lambda^{-n/q} = \lambda^{1-(n/p)}$ per ogni $\lambda > 0$, da cui $q = p^\star$.

Osservazione 2.23. La disuguaglianza isoperimetrica (nella sua versione più classica) afferma che ogni insieme aperto e limitato E di $\mathbb{R}^n$ con bordo di classe C^1 ha perimetro maggiore di quello di una qualunque palla di eguale misura. Denotando con B_r la palla di raggio $r > 0$ e centro nell'origine abbiamo che $|E| = |B_r| = \omega_n r^n$ (qui $\omega_n = |B|$, $B = B_1$) se e solo se $r = (|E|/\omega_n)^{1/n}$. Per il teorema della divergenza

$$n\omega_n = \int_B \operatorname{div}(x)dx = \int_{\partial B} x \cdot \nu_B(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)\,,$$

quindi $\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r) = r^{n-1}\mathcal{H}^{n-1}(\partial B) = n\omega_n^{1/n}|E|^{1/n'}$. Pertanto la disugualianza isoperimetrica $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r)$ prende la forma

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) \geq n\omega_n^{1/n}|E|^{1/n'}\,. \tag{2.49}$$

Nel caso $p = 1$ la disuguaglianza di Sobolev (2.47) porta a una versione più debole della disuguaglianza isoperimetrica (2.49), in cui cioè la costante $n\omega_n^{1/n}$ è rimpiazzata da una costante più piccola, 1. Tralasciando una dimostrazione rigorosa di questo fatto cerchiamo di darne una giustificazione euristica basandoci sugli strumenti fin qui introdotti. Consideriamo in particolare le ε-regolarizzate $u_\varepsilon = 1_E \star \rho_\varepsilon$ della funzione caratteristica di E, cosicchè $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $\varepsilon > 0$, e analizziamo il passaggio al limite $\varepsilon \to 0^+$ nella disuguaglianza di Sobolev $p = 1$,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{2.50}$$

(si osservi che $1^\star = n' = n/(n-1)$). Per $\varepsilon \to 0^+$ abbiamo il membro di sinistra di (2.50) converge chiaramente a $|E|^{1/n'}$. D'altra parte risulta

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)\,.$$

Infatti,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{E \cap B(x,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x-y)dy\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dunque $u_\varepsilon(x) = 1_E(x)$ se $\operatorname{dist}(x, \partial E) > \varepsilon$, e in particolare avremo

$$\{\nabla u_\varepsilon \neq 0\} = I_\varepsilon(\partial E) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \partial E) < \varepsilon\}\,.$$

L'insieme $I_\varepsilon(\partial E)$ è una striscia di ampiezza 2ε intorno al bordo di E, di misura totale approssimativamente uguale a $2\varepsilon\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$. D'altra parte avremo, sempre approssimativamente e indicando con $\pi_{\partial E}(x)$ la proiezione di x sul bordo di E,

$$\nabla u_\varepsilon(x) \approx -\frac{\nu_E(\pi_{\partial E}(x))}{2\varepsilon}\,, \qquad \forall x \in \partial E\,,$$

in quanto u_ε dovrà compiere la transizione dal valore 1 al valore 0 lungo segmenti di lunghezza 2ε centrati su ∂E e orientati dalla normale esterna ν_E. Dunque risulterà

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\varepsilon| \approx \frac{2\varepsilon\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)}{2\varepsilon} \approx \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)\,.$$

Passando al limite in $\varepsilon \to 0^+$, la disuguaglianza (2.50) implica pertanto

$$|E|^{1/n'} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)\,,$$

che, come spiegato, è una versione più debole della disuguaglianza isoperimetrica.

Dimostrazione del Teorema 2.23: La seguente dimostrazione compare (formulata nel differente contesto della teoria degli insiemi di perimetro finito) nel lavoro di De Giorgi [6]. Decomponiamo $\mathbb{R}^n$ come prodotto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $m = n-1$, indicando con $(x,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ il generico punto considerato. Con questa notazione, osserviamo allora che, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, grazie al teorema fondamentale del calcolo

$$|u(x,z)| \le \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| dt \le \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x,t)| dt\,, \quad \forall (x,z) \in \mathbb{R}^n\,,$$

e pertanto, grazie a Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)| dx \le \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,, \quad \forall z \in \mathbb{R}\,. \tag{2.51}$$

Passo uno: Dimostriamo che, se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, allora

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,,$$

che è la (2.47) nel caso $p = 1$, $n = 2$, sulle funzioni regolari. Stimiamo $|u(x,z)|^2$ applicando due volte la (2.51), intercambiando i ruoli delle due variabili (entrambe unidimensionali) e trovando quindi

$$|u(x,z)|^2 \le \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x,t)| dt \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(y,z)| dy\,, \quad \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Integrando su $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ e applicando Fubini troviammo immediatamente

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x,t)| dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(y,z)| dy\right) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\right)^2\,,$$

che è la diseguaglianza desiderata.

Passo due: Dimostriamo la (2.47) per $p = 1$ e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ragioniamo per induzione sulla dimensione n, osservando che il caso $n = 2$ è stato dimostrato nel passo uno. Assumiamo dunque che il teorema sia vero in dimensione $m = n-1$. Poichè $n \ge 3$ posto $\lambda = 1/(n-1)$ troviamo

$$\frac{n}{n-1} = \lambda + (1-\lambda)\frac{n-1}{n-2} = \lambda + (1-\lambda)\frac{m}{m-1}\,.$$

Per la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} &= \int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)|^\lambda\, |u(x,z)|^{(1-\lambda)[m/(m-1)]} dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)|\, dx\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)|^{m/(m-1)} dx\right)^{(1-\lambda)} dz\,.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Grazie alla (2.51) abbiamo

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)|\, dx\right)^\lambda \le \|\nabla u\|^\lambda_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{2.53}$$

D'altra parte, per ogni $z \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\Big(x \in \mathbb{R}^m \mapsto u(x,z)\Big) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)\,,$$

e quindi, per ipotesi induttiva

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x,z)|^{m/(m-1)} dx\right)^{(1-\lambda)} \le \left(\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_x u(x,z)| dx\right)^{m(1-\lambda)/(m-1)} = \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_x u(x,z)| dx\,, \qquad (2.54)$$

dove $\nabla_x u$ è il vettore delle prime m derivate parziali di u. Poichè evidentemente $|\nabla_x u| \le |\nabla u|$, mettendo insieme (2.52), (2.53) e (2.54) troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)} \le \|\nabla u\|^{\lambda}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}} dz \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla_x u(x,z)| dx \le \|\nabla u\|^{1+\lambda}_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u\|^{n/(n-1)}_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,,$$

che è la disuguaglianza desiderata.

Passo tre: Dimostriamo (2.47) per $p = 1$ e $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Basta considerare una successione $u_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. In questo modo, dal passo due,

$$\limsup_{h\to\infty} \|u_h\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le \lim_{h\to\infty} \|\nabla u_h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Poichè $|u_h|^{n/(n-1)} \to |u|^{n/(n-1)}$ q.o., grazie al Lemma di Fatou abbiamo ovviamente

$$\|u\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}\,,$$

e la (2.47) è dimostrata.

Passo quattro: Dimostriamo infine la (2.47) per una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < n$. Ragionando come nel passo tre, possiamo limitarci a considerare il caso di una funzione $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Per la Chain Rule troviamo che, per ogni $q > p$, $|u|^q \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, con $|\nabla |u|^q| = q|u|^{q-1}|\nabla u|$. Pertanto dal passo tre risulta

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{nq/(n-1)}\right)^{(n-1)/n} &\le q \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-1}|\nabla u| \\ &\le q\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p(q-1)/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Scegliendo

$$q = \frac{p(n-1)}{n-p}\,,$$

troviamo

$$\frac{nq}{n-1} = \frac{p(q-1)}{p-1} = p^\star\,,$$

e concludiamo la dimostrazione. □

Corollario 2.24. *Se $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ $(n \ge 2)$, allora $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in [1,\infty)$.*

Dimostrazione: Fissato $R > 0$, consideriamo $\zeta_R \in C_c^\infty(B_{R+1})$ tale che $\zeta_R = 1$ su B_R, $|\nabla\zeta_R| \leq C/R$ e $0 \leq \zeta_R \leq 1$. Dato $q \in [1^\star, \infty)$, sia poi $p \in [1, n)$ tale $p^\star = q$. Poichè $\mathrm{spt}(\zeta_R u) \subset B_{R+1}$ abbiamo chiaramente $\zeta_R u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(B_R)} &\leq \|\zeta_R u\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla(\zeta_R u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n,p)|B_{R+1}|^{(1/p)-(1/n)}\|\nabla(\zeta_R u)\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C(n,p,R)\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \,. \end{aligned}$$

Pertanto $u \in L^q(B_R)$ per ogni $q \in [1^\star, \infty)$. □

2.7.1. *Spazi di Sobolev di ordine superiore.* Dati $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, e $p \in [1, \infty]$, definiamo per induzione gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, ponendo $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se e solo se $\nabla u \in W^{k-1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Ad esempio una funzione $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ammette un gradiente debole $\nabla u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ed un Hessiano debole $\nabla^2 u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n})$, di modo che, a fianco della formula di Gauss-Green (2.3), risulta valida la formula

$$\int_\Omega u\nabla^2\varphi = \int_\Omega \varphi\nabla^2 u\,, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Le funzioni di $W^{k,p}$ sono tanto più regolari quanto più è grande il valore di $k \in \mathbb{N}$. A titolo di esempio, applicando ripetutamente la disuguaglianza di Sobolev e il Teorema di Morrey, nel caso degli spazi $W^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ possiamo dedurre quanto segue:

$$\begin{aligned} & u \in W^{1,1} \Rightarrow u \in L^{n'} = L^{n/(n-1)}\,; \\ & u \in W^{2,1} \Rightarrow \nabla u \in L^{n'} \Rightarrow u \in W^{1,n'} \Rightarrow u \in L^{(n')^\star} = L^{n/(n-2)}\,; \\ & u \in W^{h,1}\,(1 \leq h \leq n-1) \Rightarrow u \in L^{n/(n-h)}\,, \\ & u \in W^{n,1} \Rightarrow \nabla u \in L^n \Rightarrow u \in W^{1,n} \Rightarrow u \in L^q_{loc}\,(\forall q < \infty)\,; \\ & u \in W^{n+1,1} \Rightarrow \nabla u \in L^q_{loc}\,(\forall q < \infty) \Rightarrow u \in C^{0,\alpha}\,(\forall\alpha \in (0,1))\,; \\ & u \in W^{n+k+1,1}(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow u \in C^{k,\alpha}\,(\forall\alpha \in (0,1))\,; \\ & u \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^{k,1} \Rightarrow u \in C^\infty\,. \end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che dato $p \in [1, \infty)$ esiste sempre $k = k(n,p) \in \mathbb{N}$ tale che risulti $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

2.8. **Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$.** Come conseguenza del Teorema di Meyers-Serrin, quando $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è la chiusura di $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, i.e.

$$W^{1,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\,.$$

Un'importante sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$ è ottenuto formando la chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$. Per $1 \leq p < \infty$ si pone

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\,,$$

cosicchè $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed esiste una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Come intuibile dalla definizione (e come confermato dai vari risultati presentati nel seguito) è corretto pensare a $W_0^{1,p}(\Omega)$ come allo spazio delle funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ che sono nulle sul bordo di Ω. Si osservi che

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\,,$$

in virtù del Lemma 2.20.

Osservazione 2.24 (Immersione canonica in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$)**.** E' utile vedere $W_0^{1,p}(\Omega)$ come un sottospazio di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Più precisamente, data $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiamo il suo prolungamento a zero fuori da Ω come

$$Zu(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \in \Omega\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{cases} \tag{2.55}$$

Si verifica facilmente che se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora $Zu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, con $\nabla(Zu) = Z(\nabla u)$ e dunque $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|Zu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. Identificheremo pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con il suo prolungamento a zero fuori da Ω quando avremo bisogno di trattare u come elemento di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 2.25 (Chiusura debole di $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** Per definizione $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$, cioè

$$\begin{cases} \{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)\,, \\ u_h \to u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{2.56}$$

Vale in realtà una proprietà di chiusura più generale che ci sarà necessario sfruttare in seguito, ovvero

$$\begin{cases} \{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)\,, \\ u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega)\,, \\ \nabla u_h \rightharpoonup T \text{ in } L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)\,, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ con } T = \nabla u\,.$$

Infatti, per convergenza debole, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ allora

$$\int_\Omega u\nabla\varphi = \lim_{h\to\infty}\int_\Omega u_h\nabla\varphi = -\lim_{h\to\infty}\int_\Omega \varphi\nabla u_h = -\int_\Omega \varphi\, T\,,$$

e quindi $T = \nabla u$. Consideriamo poi l'insieme delle combinazioni convesse della successione $\{(u_h, \nabla u_h)\}_{h\in\mathbb{N}}$, cioè definiamo

$$C = \left\{ \sum_{h=1}^N \lambda_h(u_h, \nabla u_h) : N \in \mathbb{N}\,, \sum_{h=1}^N \lambda_h = 1\,, 0 \le \lambda_h \le 1 \right\} \subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})\,.$$

Chiaramente C è un insieme convesso. Supponiamo che $(u, \nabla u)$ non appartenga alla chiusura $\overline{C}$ (nella norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})}$) di C. Per il teorema di separazione di Hahn-Banach [2, Teorema 1.7] e per il teorema di rappresentazione di Riesz in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ esiste allora $g \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^{n+1})$ tale che

$$\inf_{(v,S)\in\overline{C}} \int_\Omega g\cdot(v,S) \quad > \quad \int_\Omega g\cdot(u,\nabla u)$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_\Omega g\cdot(u_h,\nabla u_h) \geq \inf_{(v,S)\in\overline{C}} \int_\Omega g\cdot(v,S)\,,$$

contraddizione. Dunque $(u,\nabla u)\in\overline{C}$. In particolare troviamo una successione di combinazioni convesse delle u_h che converge a u in $W^{1,p}(\Omega)$. Poichè $W^{1,p}_0(\Omega)$ è convesso (in realtà è lineare), tale successione di combinazioni convesse definisce una successione $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}}\subset W^{1,p}_0(\Omega)$ con $v_h\to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Per la proprietà di chiusura (2.56) risulta quindi $u\in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Un primo importante risultato sullo spazio $W^{1,p}_0(\Omega)$ è la seguente disuguaglianza di Faber-Krahn. Osserviamo come da essa segua immediatamente che l'unica funzione costante in $W^{1,p}_0(\Omega)$ sia la costante zero.

Lemma 2.25 (Disuguaglianza di Faber-Krahn)**.** *Se* $|\Omega|<\infty$ *e* $1\leq p<\infty$ *allora*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(n,p)|\Omega|^{1/n}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,\qquad \forall u\in W^{1,p}_0(\Omega)\,. \tag{2.57}$$

In particolare $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *definisce una norma su* $W^{1,p}_0(\Omega)$ *equivalente alla norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$*, in quanto*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (1+C(n,p)|\Omega|^{1/n})\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

per ogni $u\in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Osservazione 2.26. L'ipotesi $|\Omega|<\infty$ e la presenza di $|\Omega|^{1/n}$ nel membro di destra della (2.57) sono in qualche modo necessarie, si pensi all'osservazione 2.22. La disuguaglianza di Faber-Krahn implica che la quantità

$$\lambda_p(\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p : \int_\Omega |u|^p = 1\,, u\in W^{1,p}_0(\Omega)\right\}\,, \tag{2.58}$$

nota come *primo autovalore del p-Laplaciano*, sia positiva: infatti, dalla (2.57) troviamo

$$\lambda_p(\Omega) \geq \frac{1}{C(n,p)|\Omega|^{1/n}}\,. \tag{2.59}$$

In particolare risulta non banale (in quanto $\lambda_p(\Omega)>0$) la seguente disuguaglianza

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \geq \lambda_p(\Omega)\int_\Omega |u|^p\,,\qquad \forall u\in W^{1,p}_0(\Omega)\,, \tag{2.60}$$

che è la *forma ottimale* della disuguaglianza di Faber-Krahn, nel senso che la (2.60) è falsa non appena si rimpiazzi $\lambda_p(\Omega)$ con un $\lambda>\lambda_p(\Omega)$. Come vedremo nel Teorema 2.28, esistono sempre funzioni non-nulle che soddisfano la (2.60) con l'uguale. Tali funzioni *ottimali* per la disuguaglianza di Faber-Krahn si chiamano *autofunzioni (del primo autovalore) del p-Laplaciano.*

Dimostrazione del Lemma 2.25: Per definizione di $W^{1,p}_0(\Omega)$, ci basterà dimostrare (2.57) assumendo direttamente $u\in C^\infty_c(\Omega)$. Il caso $1\leq p<n$ segue immediatamente combinando le disuguaglianze di Hölder e di Sobolev (in quanto $C^\infty_c(\Omega)\subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$),

$$\int_\Omega |u|^p \;\leq\; |\Omega|^{1-(p/p^\star)}\left(\int_\Omega |u|^{p^\star}\right)^{p/p^\star} = |\Omega|^{p/n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^\star}\right)^{p/p^\star}$$

$$\leq \quad C(n,p)|\Omega|^{p/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p = C(n,p)|\Omega|^{p/n} \int_{\Omega} |\nabla u|^p \,,$$

Se invece $p \geq n$ si consideri $q \in [1,n)$ tale che risulti $q^\star = p$, i.e. si ponga

$$q = \frac{np}{n+p} \,.$$

Applicando la disuguaglianza di Sobolev di $W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ a u troviamo

$$\int_{\Omega} |u|^p \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q^\star} \leq C(n,q) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q \right)^{q^\star/q} \,.$$

Osservando che $q < p$ ed applicando Hölder, abbiamo inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q = \int_{\Omega} |\nabla u|^q \leq |\Omega|^{1-(q/p)} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{q/p} \,,$$

da cui si ricava infine la tesi. □

Il seguente teorema di compattezza per successioni in $W^{1,p}_0(\Omega)$ ci permetterà di dimostrare l'esistenza di minimi per problemi variazionali con condizioni di Dirichlet.

Teorema 2.26 (Teorema di compattezza per $W^{1,p}_0(\Omega)$)**.** *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e sia $p \in [1,\infty)$. Se $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione in $W^{1,p}_0(\Omega)$ tale che*

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} = M < \infty \,,$$

allora esistono $h(k) \to \infty$ ed $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $u = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ e

$$u \in L^q(\mathbb{R}^n)\,, \qquad u_{h(k)} \to u \quad \text{in } L^q(\Omega)\,,$$

per ogni esponente q che soddisfi

$$\begin{array}{ll} q \in [1,p^\star)\,, & \text{se } 1 \leq p < n\,, \\ q \in [1,\infty)\,, & \text{se } p = n\,, \\ q = \infty\,, & \text{se } p > n\,. \end{array} \tag{2.61}$$

Inoltre, se $p > 1$ allora $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ e $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 2.27. Senza l'ipotesi di limitatezza di Ω può accadere che la compattezza non sia garantita a causa di fenomeni di "fuga di massa all'infinito". Ad esempio, sia data $u \in C^\infty_c(B)$, $u \neq 0$, e consideriamo la successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ definita da $u_h(x) = u(x + h\,e)$ per $e \in \partial B$ fissato. Allora

$$\begin{array}{l} \sup_{h\in\mathbb{N}} \|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u\|_{L^p(B)} < \infty \\ u_h \to 0 \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Se dunque u_h fosse compatta, ad esempio, in $L^1(\mathbb{R}^n)$, esisterebbe $h(k) \to \infty$ tale che $u_h \to 0$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Poichè questo implicherebbe $0 = \lim_{k\to\infty} \|u_{h(k)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^1(B)}$ troveremmo una contraddizione con l'ipotesi $u \neq 0$.

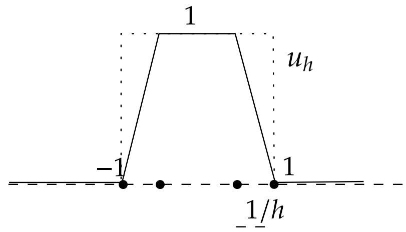


FIGURE 7. Mancanza di compattezza in $W_0^{1,1}$. Una successione di funzioni con gradienti equilimitati in L^1 può convergere a una funzione che non ammette derivata debole in L^1.

Osservazione 2.28. Se $p = 1$ la funzione limite u può non appartenere a $W_0^{1,1}(\Omega)$. Per verificare questo fenomento basta considerare la successione di funzioni affini a tratti $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,1}(-1,1))$ definita come in Figura 7. Evidentemente $\int_{\mathbb{R}} |u_h'| = 2$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $u_h \to 1$ in $L^q((-1,1))$ per ogni $q \in [1,\infty)$. Tuttavia la funzione costante $u = 1$ non appartiene a $W_0^{1,1}((-1,1))$ per via della disuguaglianza di Faber-Krahn.

Osservazione 2.29. Nel caso $1 \le p < n$, sappiamo che $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^\star}(\Omega)$. Tuttavia questa inclusione non è compatta, nel senso che una successione limitata $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ può non ammettere alcuna sottosuccessione convergente in $L^{p^\star}(\Omega)$. Consideriamo $\Omega = B$ e assegniamo $u \in C_c^\infty(B)$, $u \neq 0$. Consideriamo le funzioni $u_h \in C_c^\infty(B)$ definite da

$$u_h(x) = u(h\,x)\,, \quad x \in B\,.$$

Ovviamente $\mathrm{spt}(u_h) \subset B_{1/h}$ e inoltre, per ogni $q \ge 1$,

$$\|\nabla u_h\|_{L^p(B)} = h^{1-(n/p)}\|\nabla u\|_{L^p(B)}\,, \quad \|u_h\|_{L^q(B)} = h^{-n/q}\|u\|_{L^q(B)}\,.$$

Definiamo allora $v_h \in C_c^\infty(B)$, ponendo

$$v_h(x) = h^{(n/p)-1}u_h(x)\,, \quad x \in B\,.$$

Abbiamo $\|\nabla v_h\|_{L^p(B)} = \|\nabla u\|_{L^p(B)}$, e inoltre, per ogni $q \in [1, p^\star)$,

$$\|v_h\|_{L^q(B)} = h^{(n/p)-1-(n/q)}\|u\|_{L^q(B)} \to 0\,,$$

cioè $v_h \to 0$ in $L^q(B)$. Pertanto se $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ fosse compatta in $L^{p^\star}(B)$ il limite di una qualunque sotto-successione estratta convergente dovrebbe essere la funzione nulla. Tuttavia $\|v_h\|_{L^{p^\star}(B)} = \|u\|_{L^{p^\star}(B)} \neq 0$, dunque nessuna sotto-successione di $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ può convergere in $L^{p^\star}(B)$.

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 2.26 il seguente lemma, che quantifica la velocità di convergenza in L^1 delle ε-regolarizzate di una funzione di Sobolev.

Lemma 2.27. *Se $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u - u_\varepsilon| \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,. \tag{2.62}$$

Dimostrazione: Sia $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\begin{aligned} |v(x) - v_\varepsilon(x)| &\le \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(z)|v(x) - v(x+z)|dz = \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(z) \left| \int_0^1 \nabla v(x + s\,z) \cdot z ds \right| dz \\ &\le \varepsilon \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(z)dz \int_0^1 |\nabla v(x + s\,z)|ds\,. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - v_\varepsilon(x)|dx \le \varepsilon \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon(z)dz \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x + s\,z)|dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|\,.$$

Sia ora $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ e, dato $\delta > 0$, consideriamo $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|v - u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^n)} \le \delta$ (vedi Lemma 2.20). Poichè $u_\varepsilon - v_\varepsilon = (u - v)_\varepsilon$, applicando (1.11) ad $u - v$ troviamo

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\le \|u - v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v - v_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|v_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\le 2\|u - v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \varepsilon\|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,. \end{aligned}$$

Per $\delta \to 0$ il membro di destra converge a $\varepsilon\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, e concludiamo la dimostrazione. □

Dimostrazione del Teorema 2.26. Passo uno: L'appertenenza di u a $W_0^{1,p}(\Omega)$ nel caso $p > 1$ è una semplice conseguenza dell'osservazione (2.25). Infatti, dimostrata la prima parte del teorema, ricordando come $\{\nabla u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ sia limitata in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, troviamo che a patto di estrarre un'ulteriore sottosuccessione da $h(k)$, si ha $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup T$ per un qualche $T \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Per l'osservazione 2.25 risulta allora $T = \nabla u$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nei seguenti passi ci concentriamo dunque sulla prima parte del teorema.

Passo due: Trattiamo inizalmente il caso $p > n$, che segue facilmente dal Teorema di Morrey, per cui esiste una successione $\{\overline{u}_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\overline{u}_h = u_h$ q.o. su $\mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} &|\overline{u}_h(x)| \le C(n,p)\|u_h\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\,, \\ &|\overline{u}_h(x) - \overline{u}_h(y)| \le C(n,p)\|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x - y|^\alpha\,, \end{aligned}$$

per $x, y \in \mathbb{R}^n$. Per la disuguaglianza di Faber-Krahn abbiamo dunque

$$\begin{aligned} &|\overline{u}_h(x)| \le C(n,p)(1 + |\Omega|^{1/n})M\,, \\ &|\overline{u}_h(x) - \overline{u}_h(y)| \le C(n,p)M|x - y|^\alpha\,, \end{aligned}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste dunque $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{spt}(u) \subset \Omega$ e $h(k) \to \infty$ tale che $\overline{u}_{h(k)} \to u$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$. Dunque $u_{h(k)} \to u$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, come desiderato.

Passo tre: Trattiamo il caso $1 \le p < n$. Fissato $q \in [1, p^\star)$ consideriamo lo spazio metrico completo $X = L^q(\mathbb{R}^n)$ e dimostriamo che $Y = \{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset X$ è pre-compatto in X. A tal fine basterà dimostrare che per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme pre-compatto $Z_\delta \subset X$

tale che per ogni $y \in Y$ esista $z \in Z_\delta$ con $d(y, z) < \delta$. Come vedremo basterà porre $Z_\delta = \{(u_h)_\varepsilon\}_{h\in\mathbb{N}}$ per $\varepsilon > 0$ scelto in dipendenza da δ. Infatti dimostreremo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{h\in\mathbb{N}} \|(u_h)_\varepsilon - u_h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0\,, \tag{2.63}$$

e che

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0, \text{ la successione } \{(u_h)_\varepsilon\}_{h\in\mathbb{N}} \text{ è pre-compatta } L^q(\mathbb{R}^n)\,. \tag{2.64}$$

Passo quattro: Dimostriamo (2.63). Poichè Ω è limitato e $u_h \in W^{1,p}_0(\Omega)$, possiamo vedere u_h come un elemento di $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. In particolare dalla stima (2.62), poichè

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_h| = \int_\Omega |\nabla u_h| \le |\Omega|^{1/p'} \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} \le M|\Omega|^{1/p'}\,,$$

abbiamo

$$\|(u_h)_\varepsilon - u_h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C(n, p, |\Omega|)\varepsilon\,. \tag{2.65}$$

D'altra parte $(u_h)_\varepsilon - u_h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, quindi per la disuguaglianza di Sobolev e dal fatto che

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_h)_\varepsilon - \nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\le \|\nabla(u_h)_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|(\nabla u_h)_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le 2\|\nabla u_h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le 2M\,,
\end{aligned}$$

troviamo

$$\|(u_h)_\varepsilon - u_h\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \le C(n, p)\,. \tag{2.66}$$

Poichè $q \in [1, p^\star)$ esiste $\lambda \in [0, 1)$ tale che $q = (1-\lambda)\,1 + \lambda p^\star$ e quindi, combinando (2.65), (2.66) e la diseguaglianza di Hölder troviamo

$$\|(u_h)_\varepsilon - u_h\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \|(u_h)_\varepsilon - u_h\|^{1-\lambda}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|(u_h)_\varepsilon - u_h\|^{\lambda}_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \le C(n, p, q, |\Omega|)\varepsilon^{1-\lambda}\,.$$

La (2.63) segue immediatamente.

Passo cinque: Dimostriamo (2.64). Dalla disuguaglianza di Faber-Krahn abbiamo

$$\begin{aligned}
|(u_h)_\varepsilon(x)| &\le \frac{\|\rho\|_{L^\infty(B)}}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} |u_h| \\
&\le C(n, \varepsilon)\|u_h\|_{L^1(\Omega)} \le C(n, \varepsilon)|\Omega|^{1/p'} \|u_h\|_{L^p(\Omega)} \\
&\le C(n, \varepsilon)|\Omega|^{(1/p')+(1/n)} \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} \le C(n, \varepsilon, p, \Omega)\,,
\end{aligned}$$

cioè le $(u_h)_\varepsilon$ sono equilimitate su $h \in \mathbb{N}$. Similmente, partendo dalla stima

$$|\nabla(u_h)_\varepsilon(x)| = |(\nabla u_h)_\varepsilon(x)| \le \frac{\|\rho\|_{L^\infty(B)}}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla u_h|$$

proviamo che le $(u_h)_\varepsilon$ sono equilipschitziane su $h \in \mathbb{N}$. Poichè tali funzioni si annullano fuori da un ε-intorno di Ω grazie al Teorema di Ascoli-Arzelà $\{(u_h)_\varepsilon\}_{h\in\mathbb{N}}$ è compatto in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tenendo ancora conto della uniforme limitatezza dei supporti, tale proprietà di compattezza è immediatamente valida in $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Passo sei: Il caso $p = n$ è immediata conseguenza del fatto che, per limitatezza di Ω, $W_0^{1,n}(\Omega)$ è contenuto in $W_0^{1,q}(\Omega)$ per ogni $q \in [1, n)$. $\square$

2.9. **Metodo diretto negli spazi di Sobolev.** In questa sezione mostriamo come il teorema di compattezza in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e il teorema di semicontinuità inferiore (Teorema 2.7) permettano di implementare il Metodo Diretto in varie situazioni di particolare interesse.

2.9.1. *Problemi con vincolo di volume.* Iniziamo considerando dei problemi variazionali con vincoli di volume.

Teorema 2.28. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, sia $p \in (1, \infty)$, e sia q tale che*

$$\begin{cases} q \in [1, p^\star)\,, & se\ p \in (1, n)\,, \\ q \in [1, \infty)\,, & se\ p \geq n\,. \end{cases} \tag{2.67}$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ una funzione convessa tale che risulti

$$\frac{|\xi|^p}{C} - C \leq f(\xi)\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,, \tag{2.68}$$

per una costante $C > 0$. Allora il problema variazionale

$$m = \inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,, \int_\Omega |u|^q = 1\right\}\,,$$

ammette un minimo.

Osservazione 2.30. In riferimento all'osservazione 2.26, il Teorema 2.28 garantisce in particolare l'esistenza di autofunzioni per il p-Laplaciano.

Dimostrazione del Teorema 2.28. Fissata $u_0 \in C_c^\infty(\Omega)$, $u \neq 0$, esiste $t > 0$ tale che $\int_\Omega |t\,u|^q = 1$. Pertanto, $m < \infty$. Se dunque $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione minimizzante, dalla (2.68) troviamo che

$$C(m + C|\Omega|) \geq \limsup_{h \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_h|^p\,.$$

Per il Teorema 2.26 esistono $h(k) \to \infty$ per $k \to \infty$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che, a meno di estrarre una sottosuccessione, risulti $u_{h(k)} \to u$ in $L^q(\Omega)$. In particolare

$$\int_\Omega |u|^q = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega |u_{h(k)}|^q = 1\,,$$

e quindi u è ammissibile nel problema variazionale considerato. Poichè $\{u_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione minimizzante e grazie al Teorema 2.7 abbiamo allora,

$$m \leq \int_\Omega f(\nabla u) \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega f(\nabla u_{h(k)}) = \lim_{h \to \infty} \int_\Omega f(\nabla u_h) = m\,,$$

e pertanto u è un minimo. $\square$

2.9.2. *Problemi di tipo Dirichlet.* La classe delle funzioni con dato al bordo assegnato viene introdotta fissando $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e considerando la famiglia di funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che

$$u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Scriveremo alternativamente $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Interpretando $W_0^{1,p}(\Omega)$ come l'insieme delle funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$ con dato al bordo nullo, questo è infatti un modo naturale di esprimere la coincidenza di u e u_0 sul bordo di Ω. Considereremo dunque il problema variazionale

$$m = \inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\right\}\,, \tag{2.69}$$

andando a dimostrare il seguente risultato di esistenza di minimi.

Teorema 2.29. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che, per opportune costanti $p > 1$ e $C > 0$, risulti*

$$\frac{|\xi|^p}{C} - C \le f(\xi)\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{2.70}$$

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, e assegniamo $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che risulti $F(u_0) < \infty$. Allora il problema variazionale (2.69) *ammette un minimo.*

Osservazione 2.31. Quando $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ a fianco del problema (2.69) possiamo considerare

$$m' = \inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u) : u \in C^1(\overline{\Omega})\,, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\}\,.$$

Chiaramente $m' \ge m$. Qualora Ω abbia la sufficiente regolarità risulta tuttavia $m' = m$ (Teorema 3.14).

Osservazione 2.32. Il vincolo $p > 1$, che è necessario al fine di poter applicare il Teorema 2.26 alle successioni minimizzanti, esclude dalle ipotesi del teorema il funzionale dell'area

$$F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,,$$

corrispondente a $f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Infatti in questo caso (2.70) vale solo con $p = 1$. In effetti il problema di Dirichlet per il funzionale dell'area non è sempre risolubile, come già osservato nell'Esempio 2.4.

Il Teorema 2.29 segue facilmente dal seguente lemma di compattezza.

Lemma 2.30. *Se Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $p > 1$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\sup_{h\to\infty} \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} < \infty\,,$$

allora esistono $h(k) \to \infty$ e $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che $u_{h(k)} \to u$ in $L^q(\Omega)$ per ogni q soddisfacente (2.61) *e $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione: Posto $v_h = u_h - u_0$ abbiamo $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\sup_{h\in\mathbb{N}} \|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} < \infty$ in quanto

$$\|\nabla v_h\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u_0\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} .$$

Si conclude applicando il Teorema 2.26. □

Dimostrazione del Teorema 2.29: Avendo assunto $F(u_0) < \infty$, il problema variazionale (2.69) è non banale, cioè $m < \infty$. In particolare esiste una successione minimizzante, i.e. $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h) = m . \tag{2.71}$$

Dalla (2.70) segue d'altra parte che

$$\int_\Omega |\nabla u_h|^p \leq C\left(C|\Omega| + \int_\Omega f(\nabla u_h)\right),$$

e dunque

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|\nabla u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C(C|\Omega| + m) < \infty .$$

Per il Lemma 2.30 esistono $h(k) \to \infty$ e $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che $u_{h(k)} \to u$ in $L^p(\Omega)$. Per il Teorema 2.7

$$F(u) \leq \liminf_{k\to\infty} F(u_{h(k)}) = \lim_{h\to\infty} F(u_h) = m .$$

Poichè $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ abbiamo pure $F(u) \geq m$ e quindi u è un minimo per il problema variazionale considerato. □

Rafforzando le ipotesi su f è possibile ottenere un semplice criterio di unicità per i minimi trovati nel Teorema 2.29.

Teorema 2.31. *Nelle ipotesi del Teorema 2.29, siano u e v minimi per il problema variazionale* (2.69)*. Se f è strettamente convessa allora $u = v$ q.o. in Ω.*

Dimostrazione: La funzione $w = (u + v)/2$ appartiene alla classe di competizione, i.e. $w \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.11 si verifica allora che l'insieme $E = \{x \in \Omega : \nabla u(x) \neq \nabla v(x)\}$ ha misura nulla. Poichè $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla(u - v) = 0$ q.o. in Ω dalla disuguaglianza di Faber-Krahn otteniamo allora $u - v = 0$ q.o. in Ω. □

2.10. **Equazione di Eulero-Lagrange.** Dimostriamo ora che i minimi di un problema variazionale con condizioni al bordo di Dirichlet soddisfano (in forma debole o distribuzionale) un'equazione alle derivate parziali, nota come equazione di Eulero-Lagrange del funzionale. Vedremo poi come varie importanti equazioni alle derivate parziali possano vedersi come equazioni di Eulero-Lagrange associate ad opportuni funzionali.

Teorema 2.32 (Equazione di Eulero-Lagrange)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che per un qualche $p \in (1, \infty)$ e $C > 0$ risulti*

$$|\nabla f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}), \tag{2.72}$$

e siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La condizione di minimalità

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \int_\Omega f(\nabla u + \nabla\varphi), \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.73}$$

è equivalente alla condizione

$$\int_\Omega \nabla f(\nabla u) \cdot \nabla\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.74}$$

detta equazione di Eulero-Lagrange in forma debole del funzionale $F(v) = \int_\Omega f(\nabla v)$.

Osservazione 2.33. I minimi del problema variazionale (2.69) soddisfano chiaramente la (2.73). Inoltre l'ipotesi di coercività (2.70) è compatibile con la (2.72). Il Teorema 2.29 assicura dunque che il Teorema 2.32 sia non vuoto.

Osservazione 2.34. L'ipotesi (2.72) assicura che f soddisfi una condizione di locale Lipschitzianità "quantitativa". Più precisamente, la (2.72) implica l'esistenza di una costante C' tale che risulti

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq C'(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1})|\xi - \eta|, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{2.75}$$

come si verifica applicando il teorema fondamentale del calcolo alla funzione $h(t) = f(t\xi + (1 - t)\eta)$ sul segmento $t \in [0, 1]$. In particolare la costante di Lipschitz di f sulla palla B_R, $R > 0$, cresce come R^{p-1}.

Osservazione 2.35. Qualora si assuma maggiore regolarità di f ed u (ad esempio se $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $u \in C^2(\Omega)$), diventa possibile applicare il teorema della divergenza nella (2.74) e trovare così che

$$0 = \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(\nabla f(\nabla u)), \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (Corollario 1.2) risulta dunque valida la forma classica (o forte) dell'equazione di Eulero-Lagrange,

$$\operatorname{div}(\nabla f(\nabla u(x))) = 0, \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dimostrazione del Teorema 2.32: Ad ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ associamo una funzione $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\Phi(t) = \int_\Omega f(\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x))dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La condizione (2.73) è equivalente al fatto che Φ abbia un minimo in $t = 0$. Affermiamo che Φ è derivabile in $t = 0$, con

$$\Phi'(0) = \int_\Omega \nabla f(\nabla u(x)) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx. \tag{2.76}$$

La convessità di Φ garantirà allora che $t = 0$ sia di minimo per Φ se e solo se $\Phi'(0) = 0$, implicando dunque l'equivalenza fra (2.73) e (2.74). Rimane da dimostrare la (2.76). Poichè $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, se $t \to 0$ allora

$$\frac{f(\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)) - f(\nabla u(x))}{t} \to \nabla f(\nabla u(x)) \cdot \nabla\varphi(x) \,,$$

per ogni $x \in \Omega$. In virtù della (2.75), per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \neq 0$ con $|t| < 1$ risulta

$$\left|\frac{f(\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)) - f(\nabla u(x))}{t}\right| \leq C'(1 + |\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla\varphi(x)|^{p-1})|\nabla\varphi(x)| \,.$$

A destra in questa stima compare una funzione appartenente ad $L^1(\Omega)$, indipendente da t. Per convergenza dominata concludiamo che $\Phi'(0)$ esiste e soddisfa la (2.76). $\square$

Osservazione 2.36. La dimostrazione appena vista da il nome alla disciplina stessa del Calcolo delle Variazioni: le variazioni in questione sono evidentemente le funzioni test φ con cui si perturba il minimo u al fine di dedurre una condizione necessaria e sufficiente di minimalità in forma di equazione alle derivate parziali.

Esempio 2.5 (Equazioni ellittiche a coefficienti costanti)**.** Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la trasposta $A^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di A è definita tramite la relazione

$$\eta \cdot (A\xi) = (A^*\eta) \cdot \xi \,, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \,.$$

Diciamo che A è simmetrica se $A = A^*$ e indichiamo con $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche. Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ definiamo una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$ ponendo

$$A[\xi, \eta] = \eta \cdot (A\xi) = (A\eta) \cdot \xi \,, \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \,,$$

e definiamo un polinomio omogeneo di secondo grado $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(\xi) = A[\xi, \xi] \,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \,.$$

La simmetria di A garantisce che

$$\nabla f(\xi) = A\xi \,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,,$$

e in particolare (2.72) è sempre valido con $p = 2$. Diciamo che $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ è semidefinita positiva se $f \geq 0$ su $\mathbb{R}^n$. Come si verifica facilmente f è convessa se e solo se A è semidefinita positiva. Diciamo che A è ellittica se $f > 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. In questo caso, posto $\lambda = \inf_{S^{n-1}} f$, per compattezza risulta $\lambda > 0$. Quindi A è ellittica se e solo se esiste $\lambda > 0$ tale che

$$A[\xi, \xi] \geq \lambda|\xi|^2 \,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \,.$$

In questo caso f risulta strettamente convessa e soddisfa inoltra la (2.70) con $p = 2$. Sotto l'ipotesi di ellitticità, per ogni $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, il Teorema 2.29 garantisce l'esistenza di un minimo (unico!) $u \in u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)$ nel problema di Dirichlet

$$\inf\left\{\int_\Omega A[\nabla u, \nabla u] : u \in u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)\right\} \,.$$

Tale minimo soddisfa evidentemente la (2.73). Dal Teorema 2.32 (o tramite una semplice verifica diretta, sfruttando la linearità e l'ellitticità), abbiamo allora che

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0\,, \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\,. \tag{2.77}$$

Questa condizione è la forma debole dell'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale quadratico $F(u) = \int_\Omega A[\nabla u, \nabla u]$. Supponendo che il minimo u sia di classe $C^2(\Omega)$, la forma forte di tale equazione di Eulero-Lagrange diventa

$$\operatorname{div}(A\nabla u(x)) = 0\,, \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Sviluppando la divergenza, questa equazione prende la forma forse più familiare al lettore dell'equazione ellittica a coefficienti costanti definita da A

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0\,, \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

Nel caso notevole $A = (1/2)\mathrm{Id}$, stiamo parlando del funzionale di Dirichlet

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,,$$

la cui equazione di Eulero-Lagrange in forma debole è

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = 0\,, \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

La forma forte di tale equazione coincide dunque con la classica equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Esempio 2.6 (Equazione del p-Laplaciano)**.** Dato $p > 1$ consideriamo la funzione strettamente convessa $f(\xi) = (1/p)|\xi|^p$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Data $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, per il Teorema 2.29 il problema di Dirichlet

$$\inf\left\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\right\}\,,$$

ammette un'unico minimo u. Poichè $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con $\nabla f(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, la condizione (2.72) è banalmente soddisfatta. Dunque per il Teorema 2.32 è valida l'equazione di Eulero-Lagrange in forma debole

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi = 0\,, \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Avendo sufficiente regolarità e assumendo che ∇u non si annulli mai in Ω, la forma forte di questa equazione diventa

$$\Delta_p u(x) = 0\,, \qquad \forall x \in \Omega\,,$$

dove Δ_p è l'operatore noto come p-Laplaciano

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\,.$$

Chiaramente se $p = 2$ allora $\Delta_2 u = \Delta u$.

Osservazione 2.37. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa con $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$. Senza dover assumere la (2.72), la condizione

$$\int_\Omega f(\nabla u) \le \int_\Omega f(\nabla u + \nabla\varphi)\,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Lip}(\Omega)\,, \mathrm{spt}\varphi \subset\subset \Omega\,,$$

è equivalente alla forma debole dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\int_\Omega \nabla f(\nabla u) \cdot \nabla\varphi = 0\,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Lip}(\Omega)\,, \mathrm{spt}\varphi \subset\subset \Omega\,.$$

La dimostrazione è analoga a quella appena discussa. Infatti per applicare la convergenza dominata ci basta osservare come il fatto che f sia localmente Lipschitziana (in quanto convessa) implichi per ogni $|t| < 1$ e $x \in \Omega$ che

$$\left|\frac{f(\nabla u(x) + t\nabla\varphi(x)) - f(\nabla u(x))}{t}\right| \le \mathrm{Lip}(f; B_M)|\nabla\varphi(x)|\,,$$

dove si sia posto $M = \mathrm{Lip}(u;\Omega) + \mathrm{Lip}(\varphi;\Omega)$.

Esempio 2.7 (Equazione della curvatura media nulla)**.** Consideriamo adesso il funzionale dell'area $F(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$. Se u è un minimo di F in $\mathrm{Lip}(\Omega)$, in virtù dell'osservazione 2.37 troviamo che u soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\int_\Omega \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot \nabla\varphi = 0\,, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \tag{2.78}$$

In particolare se $u \in C^2(\Omega)$ allora si ha

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{2.79}$$

Il termine di sinistra di questa equazione coincide con la curvatura media della superficie $n-1$ dimensionale di $\mathbb{R}^n$ definita dal grafico di u. Quindi l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale dell'area minimizzato con condizione di Dirichlet esprime la condizione di curvatura media nulla.

Esempio 2.8 (Non-esistenza di grafici di area minima, II)**.** Mostriamo come utilizzare l'equazione di Eulero-Lagrange al fine di dimostrare un risultato di non-esistenza di minimi, andando a migliorare l'esempio 2.4. Consideriamo il problema di Dirichlet per il funzionale dell'area

$$\inf\left\{\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} : u \in \mathrm{Lip}(\Omega), u = u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\}\,, \tag{2.80}$$

sul dominio Ω e col dato al bordo u_0 definiti come

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < |x| < 1\}\,, \qquad u_0(x) = \begin{cases} 0\,, & |x| = 1\,,\\ M\,, & |x| = \varepsilon\,. \end{cases} \tag{2.81}$$

Assumiamo che per certi valori di ε ed M un minimo u esista. Ricordiamo che per stretta convessità tale minimo deve essere unico (Teorema 2.11) e soddisfare la stima $0 \le u \le M$ in Ω (Teorema 2.15). Per l'osservazione 4.1 avremo inoltre $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$. La simmetria di Ω e del dato al bordo garantiscono poi che la funzione u_θ ottenuta "ruotando" u intorno all'origine di un angolo θ sia anche essa un minimo. Per unicità, risulta quindi $u = u_\theta$. Pertanto deve esistere una funzione $g : [\varepsilon, 1] \to [0, M]$ tale che

$$u(x) = g(|x|)\,, \qquad x \in \Omega_\varepsilon\,.$$

Si verifica facilmente che g risulta Lipschitziana su $[\varepsilon, 1]$. Utilizzando la seconda parte del Teorema 2.15 verifichiamo inoltre che g non può avere massimi o un minimi locali stretti in $(\varepsilon, 1)$. In particolare g risulta decrescente, quindi $g' \le 0$. Inoltre, combinando il fatto che $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ con il Teorema 2.21 si trova facilmente che $g \in C^2((0, M))$. Pertanto $u \in C^2(\Omega)$ e l'equazione di Eulero-Lagrange (2.78) vale nella forma forte (2.79). Osservando che

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \frac{(1+|\nabla u|^2)\Delta u - \nabla^2 u[\nabla u, \nabla u]}{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}\,,$$

la (2.79) diventa

$$(1+|\nabla u|^2)\Delta u = \nabla^2 u[\nabla u, \nabla u] \qquad \text{su } \Omega. \tag{2.82}$$

Dati $a, b \in \mathbb{R}^n$, definiamo $a \otimes b \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ponendo $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$ e calcoliamo

$$\nabla u(x) = g'(|x|)\frac{x}{|x|}\,, \qquad \nabla^2 u(x) = g''(|x|)\frac{x\otimes x}{|x|^2} + \frac{g'(x)}{|x|}\left\{\mathrm{Id} - \frac{x\otimes x}{|x|^2}\right\}.$$

così da riscrivere la (2.82) nella forma

$$(1+(g')^2)\left(g'' + (n-1)\frac{g'}{r}\right) = (g')^2 g''\,, \qquad r \in (\varepsilon, 1)\,,$$

i.e.

$$g'' + (n-1)(1+(g')^2)\frac{g'}{r} = 0\,, \qquad r \in (\varepsilon, 1)\,.$$

Grazie al teorema di Cauchy per le equazioni ordinarie si verifica facilmente che se g non è costante (e questo è il nostro caso per via delle condizioni al bordo) allora $g' < 0$ su $(\varepsilon, 1)$. Tenendo conto che $n = 2$ e che $g' < 0$ troviamo allora

$$-\int_r^1 \frac{dt}{t} = \int_r^1 \frac{g''(t)}{g'(t)(1+(g'(t))^2)}dt\,,$$

che calcolando gli integrali diventa

$$r = c\frac{\sqrt{1+g'(r)^2}}{g'(r)}\,, \tag{2.83}$$

$$\text{dove} \qquad c = \frac{g'(1)}{\sqrt{1+g'(1)^2}}\,.$$

Poichè $r \in (\varepsilon, 1)$ la (2.83) comporta in particolare $c \in (-\varepsilon, 0)$. Poichè $g' < 0$ e $c < 0$ si risolve

$$g'(r) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\,, \qquad r \in (\varepsilon, 1)\,,$$

da cui concludiamo

$$g(r) = |c| \log\left(\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{r+\sqrt{r^2-c^2}}\right), \qquad r \in (\varepsilon, 1)\,.$$

Troviamo dunque un legame fra i due parametri ε ed M,

$$M = g(\varepsilon) = |c| \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - c^2}} \right) .$$

Poichè $|c| \leq \varepsilon$ stimiamo facilmente

$$M < \varepsilon \log \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) . \tag{2.84}$$

In conclusione, il problema (2.80) con i dati (2.81) non può ammettere minimi Lipschitziani se $M \geq \varepsilon \log(2/\varepsilon)$. Si osservi che in questo esempio, a differenza di quanto succedeva nell'Esempio 2.4, il bordo di Ω è costituito da curve regolari. Si osservi inoltre che dalla (2.84) si trova che l'estremo superiore dei valori di M per cui si ha esistenza di minimi tende a zero col tendere di ε a zero. Questo è in pieno accordo con quanto visto nell'Esempio 2.4, che è il caso limite $\varepsilon \to 0^+$ di questo esempio.

3. SPAZI DI SOBOLEV SU APERTI REGOLARI

In questa sezione approfondiamo lo studio degli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ al caso in cui l'aperto Ω goda di una certa regolarità.

3.1. **Aperti regolari e diffeomorfismi.** Dati due aperti Ω_1 e Ω_2, diciamo che $\Phi \in C^1(\Omega_1;\Omega_2)$ è un diffeomorfismo fra Ω_1 ed Ω_2 se Φ è biettiva fra Ω_1 e Ω_2, con inversa di classe C^1 e con

$$\sup_{\Omega_1} |\nabla\Phi| < \infty\,, \quad \inf_{\Omega_1} J\Phi > 0\,, \quad \sup_{\Omega_2} |\nabla\Phi^{-1}| < \infty\,, \quad \inf_{\Omega_2} J\Phi^{-1} > 0\,,$$

dove $J\Phi(x) = |\det\nabla\Phi(x)|$ è lo Jacobiano di Φ. Lo Jacobiano di Φ compare nella formula di cambiamento di variabili

$$|E| = \int_{\Phi^{-1}(E)} J\Phi(x)dx\,, \tag{3.1}$$

valida per ogni insieme Boreliano $E \subset \Omega_2$. Un semplice ragionamento di approssimazione è sufficiente a dedurre da (3.1) che

$$\int_{\Omega_2} g = \int_{\Omega_1} g(\Phi(x))J\Phi(x)dx\,, \tag{3.2}$$

per ogni funzione Boreliana $g : \Omega_2 \to [0,\infty]$.

Se esiste un diffeomorfismo Φ fra gli aperti Ω_1 ed Ω_2, ad esso si associa in modo naturale un isomorfismo fra spazi di Banach $\mathbf{\Phi} : L^p(\Omega_2) \to L^p(\Omega_1)$, $1 \le p \le \infty$ ottenuto ponendo $\mathbf{\Phi}(u) = u\circ\Phi$ (nel caso $p=\infty$ si tratta banalmente di una isometria). Osserviamo inanzitutto che $\mathbf{\Phi}$ è continua, in quanto

$$\|u\circ\Phi\|_{L^p(\Omega_2)} \le C(\Phi,p)\|u\|_{L^p(\Omega_1)}\,, \qquad \forall u \in L^p(\Omega_1)\,. \tag{3.3}$$

Infatti, grazie a (3.2), troviamo

$$\int_{\Omega_2} |u\circ\Phi|^p = \int_{\Omega_2} \frac{|u\circ\Phi|^p J\Phi}{J\Phi} \le \frac{1}{\inf_{\Omega_1} J\Phi}\int_{\Omega_1} |u|^p\,.$$

Chiaramente data $v \in L^p(\Omega_2)$ abbiamo $\mathbf{\Phi}^{-1}(v) = v\circ\Phi^{-1}$ e una stima analoga alla (3.3). Il diffeomorfismo Φ induce un isomorfismo anche fra gli spazi $W^{1,p}$.

Lemma 3.1. *Sia Φ un diffeomorfismo fra gli aperti Ω_1 ed Ω_2. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega_2)$ abbiamo allora $u\circ\Phi \in W^{1,p}(\Omega_1)$, con*

$$\nabla(u\circ\Phi) = (\nabla\Phi)^T(\nabla u\circ\Phi)\,, \tag{3.4}$$

$$\|u\circ\Phi\|_{L^p(\Omega_1)} \le C\|u\|_{L^p(\Omega_2)}\,, \tag{3.5}$$

$$\|\nabla(u\circ\Phi)\|_{L^p(\Omega_1)} \le C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_2)}\,, \tag{3.6}$$

per una costante C dipendente unicamente da Φ e da p. Inoltre, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega_2)$, allora $u\circ\Phi \in W_0^{1,p}(\Omega_1)$.

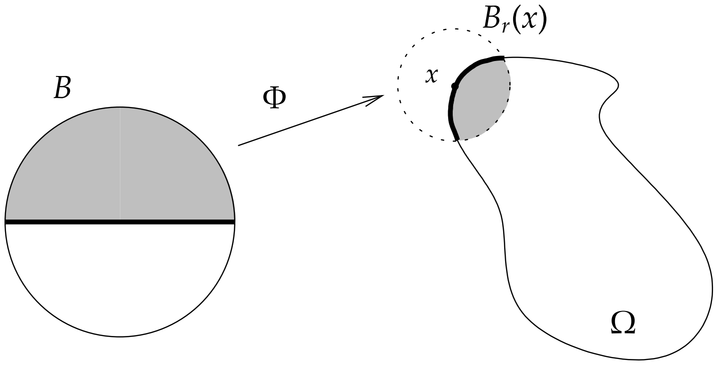


FIGURE 8. Un aperto è regolare se, in corrispondenza di ogni punto del suo bordo, esso è localmente diffeomorfo ad una semipalla (zona in grigio) e il suo bordo è localmente diffeomorfo ad un disco $(n-1)$-dimensionale (linee in grassetto).

Dimostrazione: Abbiamo già visto che $u\circ\Phi \in L^p(\Omega_1)$. Sia ora $T = (\nabla\Phi)^T(\nabla u\circ\Phi)$, abbiamo $T \in L^p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)$ con $\|T\|_{L^p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega_2)}$ in quanto

$$\int_{\Omega_1} |T|^p \leq \frac{\sup_{\Omega_1}|\nabla\Phi|}{\inf_{\Omega_1} J\Phi}\int_{\Omega_2}|\nabla u|^p\,. \tag{3.7}$$

Per provare (3.4) (da cui (3.6) segue immediatamente) ci basta dunque provare che

$$\int_{\Omega_1}(u\circ\Phi)\,\nabla\varphi = -\int_{\Omega_1}\varphi\, T\,,\quad \forall\varphi\in C^\infty_c(\Omega_1)\,.$$

Sia $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega_2)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega_2)$. Allora

$$\int_{\Omega_1}(u_h\circ\Phi)\,\nabla\varphi = -\int_{\Omega_1}\varphi\,(\nabla\Phi)^T(\nabla u_h\circ\Phi)\,,\quad \forall\varphi\in C^\infty_c(\Omega_1)\,.$$

Inoltre da (3.3) segue immediatamente che $u_h\circ\Phi \to u\circ\Phi$ in $L^p(\Omega_1)$ e, similmente, che $(\nabla\Phi)^T(\nabla u_h\circ\Phi) \to T$ in $L^p(\Omega_1;\mathbb{R}^n)$. Infine $u \in W^{1,p}_0(\Omega_2)$ implica $u\circ\Phi\in W^{1,p}_0(\Omega_1)$ in quanto Φ è un diffeomorfismo. □

Diremo che l'aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ è un *aperto regolare* se per ogni $x\in\partial\Omega$ esistono $r>0$ e un diffeomorfismo Φ fra $B_r(x)$ e B tale che

$$\Phi(B^+) = B_r(x)\cap\Omega\,,$$
$$\Phi(B^*) = B_r(x)\cap\partial\Omega\,.$$

Abbiamo qui introdotto la notazione $B = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ per indicare la palla unitaria centrata nell'origine, e, introducendo le coordinate $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ per il generico punto $x\in\mathbb{R}^n$, abbiamo introdotto gli insiemi

$$B^+ = \{x\in B : x_n>0\}\,,\quad B^- = \{x\in B : x_n<0\}\,,\quad B^* = \{x\in B : x_n=0\}\,.$$

Evidentemente, se Ω è un aperto regolare, allora $\partial\Omega$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe C^1. Tuttavia la condizione di regolarità contiene anche informazioni di natura diversa.

Esempio 3.1. Consideriamo l'insieme aperto $\Omega = \{x \in B : |x| \neq 1/2\}$. Allora $\partial\Omega = (\partial B) \cup (\partial B_{1/2})$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale analitica, ma Ω non è regolare: se Ω fosse regolare, dato x con $|x| = 1/2$, l'aperto disconnesso $\Omega \cap B_r(x)$ dovrebbe risultare, per un qualche $r > 0$, diffeomorfo all'aperto connesso B^+.

3.2. **Teoremi di estensione, approssimazione e compattezza su aperti regolari.** Il risultato fondamentale sugli aperti regolari è dato dal seguente teorema di estensione.

Teorema 3.2. *Sia Ω un aperto regolare e limitato, e sia $p \in [1,\infty)$. Allora esiste un operatore $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$Eu = u \text{ q.o. in } \Omega; \tag{3.8}$$

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \tag{3.9}$$

dove C è una costante dipendente unicamente da p ed Ω.

La dimostrazione del Teorema 3.2 si basa sul Lemma 3.1 e sul seguente lemma di estensione per riflessione, che corrisponde al Teorema 3.2 nel caso $\Omega = B^+$ (si noti che B^+ non è un aperto regolare solamente per via delle singolarità nei punti $\{x : x_n = 0\,, |x'| = 1\}$). Indichiamo con $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione rispetto al piano $\{x_n = 0\}$, i.e. $S(x) = (x', -x_n)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3.3. *Sia $u \in W^{1,p}(B^+)$ e definiamo $v : B \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$v = 1_{B^+}u + 1_{B^-}(u \circ S)\,.$$

Allora $v \in W^{1,p}(B)$, $v = u$ su B^+ e

$$\|v\|_{L^p(B)} \leq 2\|u\|_{L^p(B^+)}\,, \qquad \|\nabla v\|_{L^p(B)} \leq 2\|\nabla u\|_{L^p(B^+)}\,.$$

Inoltre, se $\mathrm{spt}(u)$ è contenuto in $B^+ \cup B^* = \{x : |x| < 1\,, x_n \geq 0\}$, allora $v \in W_0^{1,p}(B)$.

E' conveniente introdurre l'ulteriore notazione $\nabla u = (\nabla' u, \partial_n u)$ per distinguere fra le derivate parziali deboli nelle prime $(n-1)$-direzioni e fra quella nella direzione di riflessione x_n.

Dimostrazione: Introduciamo il campo vettoriale $T : B \to \mathbb{R}^n$ definito da

$$T = 1_{B+}\nabla u + 1_{B^-}(\nabla' u \circ S\,, -\partial_n u \circ S)\,.$$

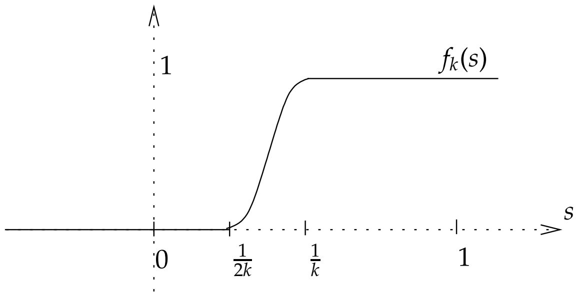
Ci basterà dimostrare che T è il gradiente debole di v in B, i.e. che

$$\int_B v\nabla\varphi = -\int_B \varphi\, T\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(B)\,,$$

per concludere la dimostrazione del lemma. A tal fine è conveniente dividere la verifica in due parti e indicare con $r \in (0,1)$ un raggio tale che risulti $\mathrm{spt}\varphi \subset\subset B_r$.

Passo uno: Dimostriamo che

$$\int_B v\nabla'\varphi = -\int_B \varphi T'\,. \tag{3.10}$$



Iniziamo osservando che, grazie a (3.2) e al fatto che $JS = 1$ e $S^{-1} = S$,

$$\begin{aligned} \int_B v\nabla'\varphi &= \int_{B^+} u\nabla'\varphi + \int_{B^-} (u \circ S)\nabla'\varphi \\ &= \int_{B^+} u\nabla'\varphi + \int_{B^+} u(\nabla'\varphi \circ S) = \int_{B^+} u\nabla'(\varphi + \varphi \circ S)\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Consideriamo $\psi : B \to \mathbb{R}$ definita da $\psi = \varphi + \varphi \circ S$, i.e. poniamo

$$\psi(x) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)\,, \quad x \in B\,.$$

Evidentemente $\psi \in C^\infty(B)$ e inoltre

$$\mathrm{spt}\psi \subset\subset B_r\,,$$

ma in generale $\psi \notin C_c^\infty(B^+)$, in quanto $\psi(x', 0) = 2\varphi(x', 0)$ e φ potrebbe non annullarsi su $\{x_n = 0\}$. Per ovviare al problema consideriamo una successione di funzioni $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ tali che $f_k(s) = 1$ se $s \geq (1/k)$, $f_k(s) = 0$ se $s \leq (1/2k)$ e

$$|f_k'(s)| \leq C\,k\,, \quad \frac{1}{2k} \leq s \leq \frac{1}{k}\,,$$

come in figura. Le funzioni $\psi_k : B \to \mathbb{R}$ definite dalla formula

$$\psi_k(x) = f_k(x_n)\psi(x)\,,$$

sono di classe C^∞ e soddisfano

$$\mathrm{spt}\psi_k \subset \left\{x : x_n \geq \frac{1}{2k}\right\} \cap B_r\,.$$

Dunque $\psi_k \in C_c^\infty(B^+)$, quindi

$$\int_{B^+} u\nabla'\psi_k = -\int_{B^+} \psi_k\nabla' u\,. \tag{3.12}$$

Poichè $\nabla'\psi_k(x) = f_k(x_n)\nabla'\psi(x)$ e $f_k(s) \to 1_{(0,\infty)}(s)$ per $k \to \infty$, per convergenza dominata da (3.11) e (3.12) troviamo

$$\int_B v\nabla'\varphi = -\lim_{k\to\infty} \int_{B^+} \psi_k\nabla' u = -\int_{B^+} \psi\nabla' u\,.$$

Cambiando variabili troviamo che

$$\int_{B^+} \psi\nabla' u = \int_{B^+} (\varphi + \varphi \circ S)\nabla' u = \int_{B^+} \varphi\nabla' u + \int_{B^-} \varphi\nabla' u \circ S = \int_B \varphi T'\,,$$

e deduciamo la validità di (3.10).

Passo due: Dimostriamo che

$$\int_B v\partial_n\varphi = -\int_B \varphi T_n\,. \tag{3.13}$$

Con un ragionamento analogo a quello che portava a (3.11) si osserva che

$$\int_B v\partial_n\varphi = \int_{B^+} u\partial_n\zeta\,,$$

dove $\zeta : B \to \mathbb{R}$ è definita come $\zeta = \varphi - \varphi \circ S$, i.e.

$$\zeta(x) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)\,, \quad x \in B\,.$$

Si osservi che $\mathrm{spt}\zeta \subset\subset B \setminus B_r$ e che $\zeta(x', 0) = 0$, tuttavia ciò non garantisce, in generale, che risulti $\zeta \in C_c^\infty(B^+)$. Introduciamo allora le funzioni modificate $\zeta_k : B^+ \to \mathbb{R}$ definite dalla formula

$$\zeta_k(x) = f_k(x_n)\zeta(x)\,.$$

La (3.13) sarà allora dimostrata provando che

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B^+} u\partial_n\zeta_k = \int_{B^+} u\partial_n\zeta\,,$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_{B^+} \zeta_k\partial_n u = \int_{B^+} \zeta\partial_n u\,.$$

La seconda equazione segue ancora per convergenza dominata. Riguardo la prima relazione osserviamo che

$$\partial_n\zeta_k(x) = f_k'(x_n)\zeta(x) + f_k(x_n)\partial_n\zeta(x)\,,$$

e dunque ci basterà dimostrare che

$$\lim_{k\to\infty}\int_{B^+} u(x)f_k'(x_n)\zeta(x)dx = 0\,.$$

Da $\zeta(x', 0) = 0$ segue $|\zeta(x', x_n)| \le K|x_n|$ per una qualche costante $K \ge 0$, quindi tenendo presente che $f_k' = 0$ fuori dall'intervallo $(0, 1/k)$, concludiamo che

$$\left|\int_{B^+} u(x)f_k'(x_n)\zeta(x)dx\right| \le C\,k\int_{\{x\in B^+:0<x_n<(1/k)\}} |u|K|x_n| \le CK\int_{\{x\in B^+:0<x_n<(1/k)\}} |u| \to 0\,,$$

in quanto $u \in L^1(B^+)$. Ciò conclude la dimostrazione di (3.13).

Passo tre: Osserviamo infine che se $\mathrm{spt}(u)$ è contenuto in $B^+ \cup B^*$, allora esiste $r \in (0, 1)$ tale che $\mathrm{spt}(u) \subset \{x : |x| < r\,, x_n \ge 0\}$. In particolare, $\mathrm{spt}(v) \subset B_r$, e quindi $v \in W_0^{1,p}(B)$. La dimostrazione del lemma è completa. □

Dimostrazione del Teorema 3.2: Passo uno: Dato $x \in \partial B$, consideriamo $r > 0$ e il diffeomorfismo Φ fra B e $B_r(x)$ tale che

$$\Phi(B^+) = B_r(x) \cap \Omega\,, \quad \Phi(B^*) = B_r(x) \cap \partial\Omega\,,$$

dato dalla definizione di aperto regolare. Dimostriamo l'esistenza di un'operatore $E_x : W^{1,p}(B_r(x) \cap \Omega) \to W^{1,p}(B_r(x))$ tale che

$$E_x u = u \text{ q.o. in } B_r(x) \cap \Omega; \tag{3.14}$$

$$\|E_x u\|_{W^{1,p}(B_r(x))} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B_r(x)\cap\Omega)}\,, \tag{3.15}$$

dove C è una costante dipendente unicamente da Φ. Sia dunque $u \in W^{1,p}(B_r(x) \cap \Omega)$. Per il Lemma 3.1, risulta $u \circ \Phi^{-1} \in W^{1,p}(B^+)$ con

$$\|u \circ \Phi^{-1}\|_{L^p(B^+)} \leq C\|u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega)}\,, \quad \|\nabla u \circ \Phi^{-1}\|_{L^p(B^+;\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Estendiamo per riflessione $u \circ \Phi^{-1}$ a B: infatti, per il Lemma 3.3, la funzione $v = 1_{B+} u \circ \Phi^{-1} + 1_{B^-}(u \circ \Phi^{-1} \circ S)$ soddisfa $v \in W^{1,p}(B)$, con $v = u \circ \Phi^{-1}$ in B^+ e

$$\|v\|_{L^p(B)} \leq C\|u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega)}\,, \quad \|\nabla v\|_{L^p(B;\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Infine, definiamo $E_x u = v \circ \Phi$. Ancora per il Lemma 3.1, risulta $E_x u \in W^{1,p}(B_r(x))$ e vale la (3.15), in quanto

$$\|E_x u\|_{L^p(B)} \leq C\|u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega)}\,, \quad \|\nabla(E_x u)\|_{L^p(B;\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x)\cap\Omega;\mathbb{R}^n)}\,.$$

Infine, da $\Phi(B^+) = B_r(x) \cap \Omega$, segue immediatamente (3.14).

Osserviamo poi che se $\zeta \in C_c^\infty(B_r(x))$ e $u \in W^{1,p}(\Omega \cap B_r(x))$, allora $E_x(\zeta u) \in W_0^{1,p}(B_r(x))$. Infatti $\operatorname{spt}(\zeta u)$ è contenuto in $B_r(x) \cap (\Omega \cap \partial\Omega)$, quindi, per le proprietà di diffeomorfismo di Φ, $\operatorname{spt}((\zeta u) \circ \Phi)$ è contenuto in $B^+ \cup B^*$. Come spiegato nel Lemma 3.3, l'estensione per riflessione v di $(\zeta u) \circ \Phi$ apparterrà a $W_0^{1,p}(B)$, e quindi avremo $E_x(\zeta u) = v \circ \Phi^{-1} \in W_0^{1,p}(B_r(x))$ come conseguenza del Lemma 3.1.

Passo due: Per ogni $x \in \partial\Omega$ indichiamo adesso con $r(x)$ il raggio dato dalla definizione di aperto regolare. Poichè Ω è limitato, $\partial\Omega$ è compatto e quindi troviamo $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \partial\Omega$ tali che, posto $r_k = r(x_k)$ e $\Omega_k = B(x_k, r_k)$, la famiglia di aperti $\{\Omega_k\}_{k=1}^N$ sia un ricoprimento finito di $\partial\Omega$ (e in realtà, di un $(\min_{1\leq k\leq N} r_k)$-intorno di $\partial\Omega$). Poichè $\overline{\Omega}$ è compatto, troviamo un aperto Ω_0 ben contenuto in Ω tale che $\{\Omega_k\}_{k=0}^N$ risulti un ricoprimento aperto finito di $\overline{\Omega}$, cui subordiniamo la partizione dell'unità $\{\zeta_k\}_{k=0}^N$, i.e. $\zeta_k \in C_c^\infty(\Omega_k)$ con $0 \leq \zeta_k \leq 1$ e

$$\sum_{k=0}^N \zeta_k(x) = 1\,, \quad \forall x \in \overline{\Omega}\,.$$

Se $1 \leq k \leq N$, grazie al passo uno, esiste un operatore $E_k : W^{1,p}(\Omega_k \cap \Omega) \to W^{1,p}(\Omega_k)$ tale che $E_k v = v$ q.o. in $\Omega_k \cap \Omega$ e

$$\|E_k v\|_{W^{1,p}(\Omega_k)} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega_k\cap\Omega)}\,, \quad E_k(\zeta_k v) \in W_0^{1,p}(\Omega_k)\,,$$

per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega_k \cap \Omega)$.

Sia infine $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Chiaramente $\zeta_0 u \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e allo stesso tempo, come osservato, avremo $E_k(\zeta_k u) \in W_0^{1,p}(\Omega_k) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se $1 \le k \le N$. Andremo allora a definire $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$Eu = \zeta_0 u + \sum_{k=1}^{N} E_k(\zeta_k u)\,.$$

Per la proprietà di partizione dell'unità, segue facilmente che $Eu = u$ q.o. in Ω. Inoltre

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|\zeta_0 u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{k=1}^{N} \|\zeta_k u\|_{W^{1,p}(\Omega_k \cap \Omega)}\,.$$

Risultando

$$\|\zeta_0 u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\zeta_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,$$
$$\|\zeta_k u\|_{W^{1,p}(\Omega_k \cap \Omega)} \le C\|\zeta_k\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,$$

e interpretando le norme $W^{1,\infty}$ delle ζ_k come costanti dipendenti da Ω concludiamo la dimostrazione di (3.9) e del teorema. □

Concludiamo osservando che l'operatore di estensione E ha in realtà valori in $W_0^{1,p}(\Omega')$ per l'aperto limitato Ω' definito dalla relazione

$$\Omega' = \bigcup_{k=0}^{N} \Omega_k\,.$$

In realtà si può fare di più:

Corollario 3.4. *Sia Ω un aperto regolare limitato, e supponiamo Ω ben contenuto in un aperto Ω' assegnato. Allora esiste $E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega')$ tale che*

$$Eu = u \text{ q.o. in } \Omega; \tag{3.16}$$

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\Omega')} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \tag{3.17}$$

dove C è una costante dipendente unicamente da p, Ω ed Ω'.

Dimostrazione: Nel passo uno della dimostrazione del Teorema 3.2 basta restringere il raggio r della palla considerata nella costruzione di E_x, $x \in \partial\Omega$, in modo che risulti $B_r(x) \subset\subset \Omega'$, e corrispondentemente comporre Φ con una dilatazione opportuna. □

Il Teorema di estensione provato nella precedente sezione permette di dimostrare una serie di risultati caratteristici degli spazi di Sobolev su domini regolari. Iniziamo col seguente teorema di approssimazione, che migliora il Teorema di Meyers-Serrin.

Teorema 3.5. *Sia Ω un aperto regolare e limitato, e sia $p \in [1,\infty)$. Per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione: Sia $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ l'operatore di estensione costruito nel Teorema 3.2 e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Poichè $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, dal Lemma 2.20 troviamo una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|u_h - Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$. Concludiamo in quanto $Eu = u$ q.o. in Ω. □

Come conseguenza dei risultati dei Teoremi di Morrey e Sobolev abbiamo poi che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con Ω aperto regolare limitato, allora

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} &\le C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \quad \text{se } 1 \le p < n\,,\\
\|u\|_{L^{q}(\Omega)} &\le C(n,q,\Omega)\|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}\,, \quad \text{se } 1 \le q < \infty\,,\\
\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} &\le C(n,p,\Omega)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \quad \text{se } p > n\,.
\end{aligned}$$

Basterà infatti applicare i risultati della sezione 2.7 a $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Ragionando similmente possiamo dimostrare un importante criterio di compattezza per successioni limitate in $W^{1,p}(\Omega)$, Ω regolare, del tutto analogo a quello provato in $W^{1,p}_0$ di un aperto generico.

Teorema 3.6 (Teorema di compattezza)**.** *Sia Ω un aperto regolare e limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, sia $p \in [1,\infty)$ e sia q tale che valga la* (2.61). *Sia $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$, tale che*

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \|u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} = M < \infty\,.$$

Allora esistono $u \in L^q(\Omega)$ ed $h(k) \to \infty$ tali che

$$u_{h(k)} \to u \quad \text{in } L^q(\Omega)\,.$$

Inoltre, se $p > 1$, risulta $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega)$.

Dimostrazione del Teorema 3.6: Passo uno: Sia Ω' un aperto limitato tale che Ω risulti ben contenuto in Ω' e sia $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}_0(\Omega')$ l'operatore di estensione costruito nel Corollario 3.4. Allora la successione $\{Eu_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}_0(\Omega')$ è nelle ipotesi del Teorema 2.26. In particolare esiste una sottosuccessione $\{Eu_{h(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed esiste $v \in W^{1,p}_0(\Omega')$ tale che $Eu_{h(k)} \to v$ in $L^q(\Omega)$. Poichè $Eu_{h(k)} = u_{h(k)}$ q.o. in Ω, abbiamo provato che $u_{h(k)} \to u$ in $L^q(\Omega)$.

Passo due: Sia ora $p > 1$. Poichè ∇u_h è limitata in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, a patto di estrarre un'ulteriore sottosuccessione, possiamo assumere che esista $T \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ tale che $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup T$ debolmente in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi \nabla u_{h(k)} = \int_\Omega \varphi T\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,.$$

Passando al limite in $\int_\Omega \varphi \nabla u_{h(k)} = -\int_\Omega u_{h(k)} \nabla\varphi$ troviamo dunque che u ammette T come gradiente debole in Ω, i.e. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u_{h(k)} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^p(\Omega)$. □

3.3. **Disuguaglianze di Poincaré.** Come dimostrato nel Lemma 2.6, se una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ soddisfa $\nabla u = 0$ su $\mathbb{R}^n$, allora essa è constante, in particolare deve necessariamente essere $u = 0$ su $\mathbb{R}^n$. Il teorema di Morrey e la disuguaglianza di Sobolev possono essere visti come versioni quantitative di questo fatto, in quanto mettono in relazione la grandezza della funzione (cioè la sua distanza dalla costante zero) con la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$ del suo gradiente. La disuguaglianza di Poincaré fornisce un analogo strumento su domini regolari. Per un aperto di misura finita Ω, indichiamo con $(u)_\Omega$ la media di $u \in L^1(\Omega)$ su Ω, i.e.

$$(u)_\Omega = \fint_\Omega u(x)dx\,.$$

Teorema 3.7 (Disuguaglianze di Poincaré)**.** *Sia Ω un aperto regolare, connesso e limitato, e sia $1 \le p < \infty$. Allora*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le C(n, p, \Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,, \tag{3.18}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione: Supponiamo che la (3.18) sia falsa. Esisterebbe allora una successione di funzioni $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che

$$\|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} = 1\,, \quad \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} = 0\,.$$

Posto $v_k = u_k - (u_k)_\Omega$ risulta allora $v_k \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$(v_k)_\Omega = 0\,, \quad \|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1\,, \quad \lim_{k\to\infty} \|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega);\mathbb{R}^n)} = 0\,.$$

In particolare $\|v_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ è limitata, quindi per il Teorema 3.6 esiste $v \in L^p(\Omega)$ tale che $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$, e in particolare $(v_k)_\Omega \to (v)_\Omega$. Dunque

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1\,, \quad (v)_\Omega = 0\,. \tag{3.19}$$

Osserviamo d'altra parte che $v \in W^{1,p}(\Omega)$ (il che non è garantito, in generale, dal Teorema 3.6 nel caso $p = 1$) con $\nabla v = 0$ su Ω. Infatti se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, poichè $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ e $\nabla v_k \to 0$ in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$, abbiamo

$$\int_\Omega v\nabla\varphi = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega v_k \nabla\varphi = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi\nabla v_k = 0\,,$$

i.e. 0 è il gradiente debole di v in Ω. Essendo Ω connesso, dal Lemma 2.6, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $v = c$ q.o. in Ω. Poichè $(v)_\Omega = 0$ deve essere $c = 0$, ma allora $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 0$ contro la (3.19). □

Possiamo sempre combinare la disuguaglianza (3.18) con i risultati della sezione 2.7 per ottenere un controllo più forte di $u - (u)_\Omega$. A titolo di esempio consideriamo il caso $1 \le p < n$:

Lemma 3.8 (Disuguaglianza di Sobolev-Poincaré)**.** *Sia Ω aperto regolare connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, e sia $1 \le p < n$. Allora*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \le C(n, p, \Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,, \tag{3.20}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione: Si considera l'operatore di estensione E di Ω, e si applica la disuguaglianza di Sobolev all'estensione di $v = u - (u)_\Omega$, per trovare

$$\|v\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq \|Ev\|_{L^{p^\star}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\|\nabla(Ev)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,\Omega)\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} . \tag{3.21}$$

Per la diguaglianza di Poincaré (3.20), poichè $(v)_\Omega = 0$, troviamo $\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$, e dunque $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$. Combinando questa stima con (3.21) si perviene alla (3.20). □

Nello studio della regolarità dei problemi variazionali risulta utile la seguente variante della disugaglianza di Poincaré (o, se vogliamo, della disuguaglianza di Faber-Krahn).

Teorema 3.9. *Sia Ω aperto regolare connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e sia $1 \leq p < n$. Allora*

$$\|u\|_{L^{p^\star}(\Omega)} \leq C(n,p,\Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} , \tag{3.22}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che risulti

$$u \geq 0 , \quad |\{x \in \Omega : u(x) > 0\}| \leq \frac{|\Omega|}{2} . \tag{3.23}$$

Dimostrazione: Grazie ad un ragionamento analogo a quello fatto nel passo due della dimostrazione del Teorema 3.7 ci basterà provare che

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(n,p,\Omega)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} , \tag{3.24}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ soddisfacente le (3.23). Poniamo per brevità $\{u > 0\} = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Se la (3.24) non fosse valida esisterebbe una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$u_h \geq 0 , \quad |\{u_h > 0\}| \leq \frac{|\Omega|}{2} , \quad \int_\Omega |u_h|^p = 1 , \quad \lim_{h\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_h|^p = 0 .$$

Grazie al Teorema di compattezza e allo stesso ragionamento fatto nel passo uno della dimostrazione del Teorema 3.7, a meno di estrarre una sotto-successione che non indichiamo, potremmo allora trovare $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$u \geq 0 , \quad \int_\Omega |u|^p = 1 , \quad \nabla u = 0 \text{ in } \Omega.$$

Per connessione di Ω, dal Lemma 2.6, esiste $c \geq 0$ tale che $u = c$ q.o. in Ω. Tuttavia

$$0 = \lim_{h\to\infty} \int_\Omega |u - u_h| \geq \lim_{h\to\infty} \int_{\Omega\setminus\{u_h>0\}} |u| \geq c\frac{|\Omega|}{2} ,$$

e quindi $c = 0$, contro il fatto che $\int_\Omega |u|^p = 1$. □

La dipendenza dal dominio Ω delle costanti $C(n,p,\Omega)$ trovate nei Teoremi 3.7 e 3.9 si può in qualche modo rendere più esplicita tramite dimostrazioni dirette, e non per contraddizione, di queste disuguaglianze. Non tratteremo queste dimostrazioni nel corso. Tuttavia nel caso in cui Ω sia una palla si può facilmente esplicitare la dipendenza della costante dal raggio. Più precisamente, sia $u \in W^{1,p}(B_r(x))$ e sia $v \in W^{1,p}(B)$ definita ponendo $v(z) = u(x + rz)$. Allora $(v)_B = (u)_{x,r}$ e

$$\int_B |v - (v)_B|^q = r^n \int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^q \,, \qquad \int_B |\nabla v|^p = r^{n+p} \int_{B_r(x)} |\nabla u|^p \,.$$

Se dunque $C(n, p, B) = C(n, p)$ è una costante per cui la (3.18) risulti valida in $W^{1,p}(B)$, troveremo che

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B_r(x))} \le C(n, p)\, r\, \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \,, \tag{3.25}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(B_r(x))$. Similmente, la (3.20) prende la forma

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^{p^\star}(B_r(x))} \le C(n, p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \,, \tag{3.26}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(B_r(x))$, $1 \le p < n$. Poichè inoltre $|\{u > 0\}| = r^n|\{v > 0\}|$, dalla (3.22) per $\Omega = B$ concludiamo che

$$\|u\|_{L^{p^\star}(B_r(x))} \le C(n, p)\|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \,, \tag{3.27}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(B_r(x))$ tale che $u \ge 0$ e $|\{z \in B_r(x) : u(z) > 0\}| \le |B_r(x)|/2$.

3.4. **Valori al bordo ed operatore di traccia.** In questa sezione discuteremo in che modo per le funzioni di Sobolev su un aperto regolare limitato si possa parlare di valori assunti al bordo dell'aperto. Se Ω è un aperto regolare limitato, allora il suo bordo $\partial\Omega$ è una varietà di classe C^1, e in particolare risulta valido il Teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega} u\,(T \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega T \cdot \nabla u + u \operatorname{div} T \,, \tag{3.28}$$

per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $T \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ il "valore al bordo" di u in Ω è allora individuato come l'unico elemento di $L^p(\partial\Omega)$ che renda valida la (3.28) per ogni $T \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.10. *Sia Ω un aperto regolare e limitato, e sia $p \in [1, \infty)$. Esiste un operatore lineare* $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *con le seguenti proprietà:*

(a) Tr *è continuo, i.e.*

$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \,, \tag{3.29}$$

per una costante C dipendente unicamente da p e da Ω;

(b) *per ogni $T \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ risulta*

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{Tr}(u)\,(T \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega T \cdot \nabla u + u \operatorname{div} T \,,$$

o, equivalentemente, per ogni $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{Tr}(u)\, \varphi\, \nu_\Omega\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_\Omega u \nabla\varphi + \varphi\, \nabla u \,; \tag{3.30}$$

(c) *se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ allora* $\mathrm{Tr}(u)(x) = u(x)$ *per $\mathcal{H}^{n-1}$-q.o. $x \in \partial\Omega$.*

Alla dimostrazione del teorema premettiamo una semplice conseguenza della definizione di dominio regolare.

Lemma 3.11. *Sia Ω un aperto regolare e limitato. Allora,*

(1) *esiste $T \in C^0_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$T(x) = \nu_\Omega(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \partial\Omega;$$

(2) *per ogni $\delta > 0$ esiste $T_\delta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\max_{\partial\Omega} |T_\delta - \nu_\Omega| \le \delta\,.$$

Dimostrazione: Passo uno: Dato $x \in \partial\Omega$, consideriamo il diffeomorfismo Φ fra B e $B_r(x)$ dato dalla definizione di aperto regolare. Poichè Φ è un diffeomorfismo fra B^+ e $\Omega \cap B_r(x)$ che porta $B^* \subset \partial B^+$ in $B_r(x) \cap \partial\Omega \subset \partial(\Omega \cap B_r(x))$, e poichè $-e_n$ è la normale esterna a B^+ su B^*, la normale esterna ad Ω in $\Phi(z)$, $z \in B^*$, soddisfa la formula

$$\nu_\Omega(\Phi(z)) = \frac{(\nabla\Phi^{-1}(z))^*[-e_n]}{|(\nabla\Phi^{-1}(z))^*[-e_n]|}\,.$$

Consideriamo allora il campo vettoriale $T_x \in C^0(B_r(x);\mathbb{R}^n)$ definito da

$$T_x(y) = \frac{(\nabla\Phi^{-1}(\Phi(y)))^*[-e_n]}{|(\nabla\Phi^{-1}(\Phi(y)))^*[-e_n]|}\,, \qquad y \in B_r(x)\,,$$

esso soddisfa per costruzione $T_x(y) = \nu_\Omega(y)$ per ogni $y \in B_r(x) \cap \partial\Omega$.

Per compattezza di $\partial\Omega$ troviamo ora dei punti $\{x_k\}_{k=1}^N \subset \partial\Omega$, dei raggi $r_k > 0$, e dei diffeomorfismi Φ_k fra B e $B(x_k, r_k)$ con $\Phi(B^+) = B(x_k, r_k) \cap \Omega$, $\Phi(B^*) = B(x_k, r_k) \cap \partial\Omega$, tali che $\partial\Omega$ sia ricoperto da $\{B(x_k, r_k)\}_{k=1}^N$. Corrispondentemente, troviamo $\zeta_k \in C^\infty_c(B(x_k, r_k))$ tale che risulti $0 \le \zeta_k \le 1$ e $\sum_{k=1}^N \zeta_k = 1$ su $\partial\Omega$. Posto allora

$$T = \sum_{k=1}^N \zeta_k T_k\,,$$

dove $T_k = T_{x_k}$, concludiamo la dimostrazione di (1).

Passo due: Consideriamo l'ε-regolarizzato T_ε del campo T. Poichè T è continuo a supporto compatto, $T_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ converge uniformemente a T in $\mathbb{R}^n$. In particolare, a patto di prendere $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, si può realizzare la condizione $\max_{\partial\Omega} |T_{\varepsilon(\delta)} - \nu_\Omega| \le \delta$. □

Dimostrazione del Teorema 3.10: Passo uno: Dimostriamo che, per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$, risulta

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \tag{3.31}$$

dove C è una costante dipendente da p e da Ω. Sia $\delta > 0$ tale che il campo T_δ relativo ad Ω costruito nel Lemma 3.11 soddisfi

$$\min_{\partial\Omega} T_\delta \cdot \nu_\Omega \ge \frac{1}{2}\,.$$

Allora dal dal teorema della divergenza (3.28) troviamo che, se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $u \ge 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u\, d\mathcal{H}^{n-1} \quad &\le \quad \int_{\partial\Omega} u\,(T_\delta \cdot \nu_\Omega)\, d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= \quad \int_\Omega \nabla u \cdot T_\delta + u \operatorname{div}\, T_\delta
\end{aligned}$$

$$\leq \max_{\mathbb{R}^n} \{|T_\delta| + |\nabla T_\delta|\} \int_\Omega u + |\nabla u| = C \int_\Omega u + |\nabla u| \,. \tag{3.32}$$

Sia adesso $f_\varepsilon(s) = (\sqrt{s^2+\varepsilon^2} - \varepsilon)^p$, $s \in \mathbb{R}$, allora $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} |f'_\varepsilon(s)| = \begin{cases} p|s|^{p-1}\frac{s}{|s|}\,, & \forall s \neq 0\,, \\ 0\,, & s = 0\,. \end{cases}$$

Se dunque $u \in C^1(\overline{\Omega})$, possiamo applicare (3.32) a $f_\varepsilon \circ u$ e passare al limite per $\varepsilon \to 0^+$, trovando così

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_\Omega |u|^p + |u|^{p-1}|\nabla u| \leq C \int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p \,,$$

dove nell'ultimo passaggio si è aumentato il valore di C e si è applicata la disuguaglianza di Young $ab \leq (a^p/p) + (b^{p'}/p')$. Ciò dimostra la validità di (3.31).

Passo due: Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e consideriamo una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Dalla (3.31) segue immediatamente che le restrizioni delle u_h a $\partial\Omega$ costituiscono una successione di Cauchy in $L^p(\partial\Omega)$. Per completezza, esiste dunque una funzione $\mathrm{Tr}(u) \in L^p(\partial\Omega)$, che soddisfa automaticamente la (3.29). Questa costruzione definisce un operatore $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ in quanto dal Teorema 3.5 possiamo sempre trovare una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ approssimante u in $W^{1,p}(\Omega)$; inoltre, data un'altra successione $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ che approssimi u in $W^{1,p}(\Omega)$ avremo, sempre da (3.31),

$$\|u_h - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(\Omega, p)\|u_h - v_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0\,.$$

Dunque $\mathrm{Tr}(u)$ è univocamente determinato in $L^p(\partial\Omega)$ a partire solamente da u, e non dalla particolare successione in $C^1(\overline{\Omega})$ utilizzata per approssimare u.

Passo tre: La (b) segue passando al limite nella (3.28) lungo una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. La proprietà (c) segue facilmente dalla costruzione di Tr. □

Nella seguente proposizione si presenta una stima in qualche modo complementare alla (3.29).

Proposizione 3.12. *Sia Ω aperto limitato regolare, e sia $p \in [1,\infty)$. Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\Big(\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}\Big)\,, \tag{3.33}$$

per una costante C dipendente unicamente da n, p ed Ω.

Dimostrazione: Grazie al Teorema 3.5 e alla continuità dell'operatore di traccia espressa dalla (3.29), basterà dimostrare che, per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$, risulti

$$\int_\Omega |u|^p \leq C\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \int_\Omega |\nabla u|^p\right)\,, \tag{3.34}$$

dove C sia una costante dipendente unicamente da n, p ed Ω. A tal fine consideriamo inanzitutto $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $v \geq 0$. Se $R > 0$ è tale che $\Omega \subset B_R$ e poniamo $T(x) = x$, dal teorema della divergenza troviamo

$$\begin{aligned} n \int_\Omega v &= \int_\Omega v \operatorname{div}(x) = -\int_\Omega (x \cdot \nabla v) + \int_{\partial\Omega} v(x \cdot \nu_\Omega) \\ &\leq \int_\Omega |x||\nabla v| + \int_{\partial\Omega} |x| v \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq R\left(\int_\Omega |\nabla v| + \int_{\partial\Omega} v \, d\mathcal{H}^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Data quindi $u \in C^1(\overline{\Omega})$ applichiamo questa disuguaglianza a $v = f_\varepsilon \circ u$ dove $f_\varepsilon(s) = (\sqrt{s^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon)^p$. Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e ragionando come nella dimostrazione del passo uno del Teorema 3.10 troviamo allora

$$\int_\Omega |u|^p \leq \frac{R}{n}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} + p \int_\Omega |u|^{p-1}|\nabla u|\right), \tag{3.35}$$

per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Se $p = 1$ questa è la (3.34) e abbiamo concluso. Se invece $p > 1$, applichiamo la disuguaglianza di Young $ab \leq (a^p/p) + (b^{p'}/p')$ scegliendo

$$a = \frac{|\nabla u|}{\varepsilon}, \quad b = \varepsilon|u|^{p-1}, \quad \varepsilon > 0,$$

e trovando quindi dalla (3.35)

$$\int_\Omega |u|^p \leq \frac{R}{n}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} + (p-1)\varepsilon^{p'} \int_\Omega |u|^p + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_\Omega |\nabla u|^p\right),$$

i.e.

$$\left(1 - \frac{R(p-1)}{n}\varepsilon^{p'}\right) \int_\Omega |u|^p \leq \frac{R}{n}\left(\int_{\partial\Omega} |u|^p d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_\Omega |\nabla u|^p\right). \tag{3.36}$$

Scegliamo $\varepsilon = \varepsilon(n, p, \Omega)$ in modo che risulti

$$\frac{R(p-1)}{n}\varepsilon^{p'} = \frac{1}{2},$$

per trovare infine la (3.34). □

Dimostriamo adesso che, se Ω è un aperto regolare limitato, allora

$$W^{1,p}_0(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \operatorname{Tr}(u) = 0\}.$$

Teorema 3.13. *Sia Ω un aperto regolare limitato e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per $p \in [1, \infty)$. Allora $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ se e soltanto se $\operatorname{Tr}(u) = 0$.*

Dimostrazione: Se $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ abbiamo banalmente $\operatorname{Tr}(u) = 0$, in quanto dall'esistenza di $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\Omega)$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ abbiamo immediatamente $0 = \operatorname{Tr}(u_h) \to \operatorname{Tr}(u)$ in $L^p(\partial\Omega)$, i.e. $\operatorname{Tr}(u) = 0$. L'implicazione opposta è invece più delicata.

Passo uno: Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Per il Teorema 3.5 esiste $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tale che $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Per continuità dell'operatore di traccia abbiamo

$$\int_{\partial\Omega} |u_h|^p d\mathcal{H}^{n-1} \to 0\,.$$

Vogliamo trovare $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - v_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0\,.$$

In realtà ci basterà richiedere $v_h \in C_c^1(\Omega)$, per poi passare alle ε_h-regolarizzate delle funzioni v_h trovate per un'opportuna successione ε_h tendente a zero.

Passo due: Grazie alla definizione di aperto regolare e all'usuale ragionamento basato sulle partizioni dell'unità, possiamo direttamente considerare la seguente situazione. Sono dati $x \in \partial\Omega$, $r > 0$, $u \in W^{1,p}(\Omega \cap B_r(x))$ con $\mathrm{spt}(u) \subset B_{r'}(x) \cap \overline{\Omega}$ per un qualche $r' \in (0, r)$, e con essi una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega} \cap B_r(x))$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega \cap B_r(x))$ e tale che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{B_r(x)\cap\partial\Omega} |u_h|^p d\mathcal{H}^{n-1} = 0\,,$$
$$\mathrm{spt}(u_h) \subset \overline{\Omega} \cap B_{r'}(x).$$

Vogliamo trovare $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C_c^1(B_r(x) \cap \Omega)$ tale che $\|u_h - v_h\|_{W^{1,p}(\Omega\cap B_r(x))} \to 0$.

Sia dunque Φ è il diffeorfismo fra B e $B_r(x)$ dato dalla definizione di aperto regolare, avremo che $\{u_h \circ \Phi\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{B^+})$ soddisfa, per un'opportuno $s \in (0, 1)$,

$$u_h \circ \Phi \to u \circ \Phi \quad \text{in} \quad W^{1,p}(B^+),$$
$$\lim_{h\to\infty} \int_{B^*} |u_h \circ \Phi|^p d\mathcal{H}^{n-1} = 0\,,$$
$$\mathrm{spt}(u_h \circ \Phi) \subset \{z : |z| < s\}.$$

Grazie a questa osservazione ci basterà dunque risolvere il problema enunciato nel seguente passo della dimostrazione.

Passo tre: Siano $u \in W^{1,p}(B^+)$ e $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{B^+})$ tali che, per un qualche $s \in (0, 1)$, risulti

$$u_h \to u \quad \text{in} \quad W^{1,p}(B^+)\,,$$
$$\lim_{h\to\infty} \int_{B^*} |u_h(z', 0)|^p dz' = 0\,,$$
$$\mathrm{spt}(u_h) \subset \{z : |z| \le s\}\,,$$

Vogliamo costruire $\{v_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset C_c^1(B^+)$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} \|u_h - v_h\|_{W^{1,p}(B^+)} = 0\,. \tag{3.37}$$

Consideriamo delle funzioni $f_h \in C^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ tali che $f_h(s) = 1$ se $s \geq 2\delta_h$, $f_h(s) = 0$ se $s \leq \delta_h$ e

$$|f_h'(s)| \leq \frac{C}{\delta_h}, \quad \delta_h \leq s \leq 2\delta_h,$$

per una successione $\delta_h \to 0^+$ da determinare in seguito, e poniamo $v_h(z) = f_h(z_n)u_h(z)$. Chiaramente $v_h \in C^1_c(B^+)$, rimane dunque da dimostrare la (3.37). Banalmente

$$\begin{aligned}\left(\int_{B^+} |u_h - v_h|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{B^+\cap\{z_n\leq 2\delta_h\}} |u_h|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{B^+\cap\{z_n\leq 2\delta_h\}} |u|^p\right)^{1/p} + \|u_h - u\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

e dunque $\|u_h - v_h\|_{L^p(B^+)} \to 0$. Consideriamo allora la differenza dei gradienti, e stimiamo

$$\left(\int_{B^+} |\nabla u_h - \nabla v_h|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_{B^+} |f_h(z_n)\nabla u_h(z) - \nabla u_h(z)|^p dz\right)^{1/p} + \left(\int_{B^+} |f_h'(z_n)|^p |u_h(z)|^p dz\right)^{1/p}.$$

Sfruttando il fatto $\nabla u_h \to \nabla u$ in L^p e ragionando come in (3.38) troviamo allora

$$\lim_{h\to\infty} \|\nabla u_h - \nabla v_h\|_{L^p(B^+;\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{h\to\infty} \left(\int_{B^+} |f_h'(z_n)|^p |u_h(z)|^p dz\right)^{1/p}.$$

Concludiamo la dimostrazione del teorema provando che

$$\lim_{h\to\infty} \int_{B^+} |f_h'(z_n)|^p |u_h(z)|^p dz = 0. \tag{3.39}$$

Chiaramente,

$$\int_{B^+} |f_h'(z_n)|^p |u_h(z)|^p dz \leq \frac{C}{\delta_h^p} \int_{B^+\cap\{0\leq z_n\leq 2\delta_h\}} |u_h(z)|^p dz. \tag{3.40}$$

Poichè $u_h \in C^1(\overline{B^+})$, per ogni $z \in B^+$ abbiamo

$$|u_h(z)| \leq |u_h(z',0)| + \int_0^{z_n} |\nabla u_h(z',t)| dt \leq |u_h(z',0)|^p + |z_n|^{1/p'} \left(\int_0^{z_n} |\nabla u_h(z',t)|^p dt\right)^{1/p},$$

da cui

$$|u_h(z)|^p \leq C\left(|u_h(z',0)|^p + |z_n|^{p-1} \int_0^{z_n} |\nabla u_h(z',t)|^p dt\right).$$

Integrando su $B^+ \cap \{0 \leq z_n \leq 2\delta_h\}$ troviamo quindi

$$\int_{B^+\cap\{0\leq z_n\leq 2\delta_h\}} |u_h(z)|^p dz \leq 2\delta_h \int_{B^*} |u_h(z',0)|^p dz' + \frac{(2\delta_h)^p}{p} \int_{B^*} dz' \int_0^{2\delta_h} |\nabla u_h(z',t)|^p dt,$$

che, combinata con (3.40) porta a

$$\int_{B^+} |f_h'(z_n)|^p |u_h(z)|^p dz \leq C\left(\frac{1}{\delta_h^{p-1}} \int_{B^*} |u_h(z',0)|^p dz' + \int_{B^+\cap\{0\leq z_n\leq 2\delta_h\}} |\nabla u_h(z)|^p dz\right).$$

Basta dunque scegliere una successione δ_h che vada a zero così lentamente da avere

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{\delta_h^{p-1}} \int_{B^*} |u_h(z',0)|^p dz' = 0\,,$$

per così trovare la (3.39) e concludere la dimostrazione del teorema. □

3.5. **Minimizzazione in Sobolev e minimizzazione in C^1.** Nelle situazioni in cui entrambi le formulazioni risultino possibili, ambientando il problema di Dirichlet nello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ invece che in $C^1(\overline{\Omega})$ abbiamo in generale allargato la classe di competizione del problema. In linea di principio, così facendo potremmo aver diminuito il valore dell'estremo inferiore. Il seguente teorema indica delle condizioni generali in cui questo fenomeno si può escludere.

Teorema 3.14. *Sia Ω un aperto regolare e limitato di $\mathbb{R}^n$. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa tale che, per opportune costanti $p > 1$ e $C > 0$, risulti*

$$\frac{|\xi|^p}{C} - C \le f(\xi) \le C(1 + |\xi|^p)\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{3.41}$$

Infine, sia $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ e consideriamo i problemi di Dirichlet

$$m = \inf\left\{ \int_\Omega f(\nabla u) : u \in W^{1,p}(\Omega)\,, \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u_0) \right\}\,, \tag{3.42}$$

$$m' = \inf\left\{ \int_\Omega f(\nabla u) : u \in C^1(\overline{\Omega})\,, u = u_0 \text{ su } \partial\Omega \right\}\,. \tag{3.43}$$

Risulta allora $m = m'$.

Dimostrazione: Grazie al punto (c) del Teorema 3.10 abbiamo immediatamente $m' \ge m$. Sia ora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u_0)$ un minimo per il problema variazionale (3.42). Dal Teorema 3.13 esiste una successione $v_h \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $v_h \to u - u_0$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Quindi $u_h = v_h + u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ e, per q.o. $x \in \Omega$, abbiamo

$$C(1 + |\nabla u_h(x)|^p) - f(\nabla u_h(x)) \to C(1 + |\nabla u(x)|^p) - f(\nabla u(x))\,,$$

dove $C(1 + |\xi|^p) - f(\xi)$ è una funzione continua non negativa su $\mathbb{R}^n$. Dal Lemma di Fatou,

$$\begin{aligned} \int_\Omega C(1 + |\nabla u|^p) - f(\nabla u) &\le \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega C(1 + |\nabla u_h|^p) - f(\nabla u_h) \\ &= \int_\Omega C(1 + |\nabla u|^p) + \liminf_{h\to\infty} - \int_\Omega f(\nabla u_h)\,, \end{aligned}$$

i.e., poichè $u_h = u_0$ su $\partial\Omega$,

$$m' \le \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h) \le \int_\Omega f(\nabla u) = m\,,$$

come desiderato. □

4. REGOLARITA' DEI MINIMI

Nei precedenti capitoli abbiamo introdotto gli spazi di Sobolev al fine di dimostrare l'esistenza di minimi in alcuni problemi variazionali. Abbiamo inoltre dimostrato che, almeno sotto opportune ipotesi, l'allargamento della classe di competizione dalle funzioni lisce alle funzioni di Sobolev non fa decrescere il valore dell'estremo inferiore del problema di minimo considerato. Sappiamo tuttavia che la mera appartenenza ad una classe di Sobolev è una condizione di regolarità molto debole. Ad esempio, come illustrato con gli opportuni esempi, le funzioni di $W^{1,2}(\Omega)$ per Ω aperto di $\mathbb{R}^3$, che è lo spazio di esistenza per i minimi dell'integrale di Dirichlet, possono essere non localmente limitate. Tali degenerazioni non sono in realtà compatibili con la minimalità, e lo scopo di quest'ultimo capitolo sarà appunto quello di sviluppare i risultati fondamentali della teoria di regolarità. Consideriamo al solito un funzionale variazionale del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\,,$$

per $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ convessa. Come visto, in ipotesi di sufficente regolarità, una funzione u che minimizzi F rispetto al proprio dato al bordo soddisfa l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\operatorname{div}(\nabla f(\nabla u)) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Derivando formalmente tale equazione rispetto alla direzione i-esima, ponendo $v = \partial_i u$, e tenendo conto del fatto che $\partial_i \operatorname{div} = \operatorname{div} \partial_i$, troviamo dunque che

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla u)\nabla v) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Sotto ipotesi di uniforme convessità della funzione f, questa equazione può vedersi come un'equazione ellittica per v, associata al campo di matrici $A = \nabla^2 f(\nabla u)$. La teoria della regolarità che discuteremo in queste dispense si articolerà allora in due fasi. Nella prima fase dimostreremo che i minimi trovati nel capitolo precedente posseggono derivate seconde distribuzionali, le quali soddisfano in senso debole l'equazione ellittica definita da $A = \nabla^2 f(\nabla u)$. Nella seconda fase studieremo le proprietà di regolarità di soluzioni deboli v di equazioni ellittiche del tipo $\operatorname{div}(A\nabla v) = 0$. Combinando questi risultati perverremo infine a risultati di derivabilità classica per i minimi di F.

Notazione: Nel seguito lavoreremo come al solito in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denoteremo con $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ la distanza dal bordo di Ω e porremmo $d(\Omega') = \inf\{d(x) : x \in \Omega'\}$ per $\Omega' \subset \Omega$.

4.1. **Equazioni ellittiche per le derivate dei minimi.** In questa sezione dimostreremo l'esistenza di derivate seconde distribuzionali per i minimi di un funzionale uniformemente convesso soddisfacenti opportune equazioni ellittiche in forma di divergenza.

4.1.1. *Equazioni ellittiche in forma di divergenza.* Consideriamo un campo limitato di matrici simmetriche e semidefinite positive

$$A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}),$$

e denotiamo con Λ la norma L^∞ di A, di modo che risulti

$$|A(x)[\tau, \sigma]| \le \Lambda |\tau||\sigma|, \tag{4.1}$$

per ogni $\tau, \sigma \in \mathbb{R}^n$ e per q.o. $x \in \Omega$. Diciamo che $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ risolve la forma debole dell'equazione ellittica in forma di divergenza $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$ se risulta

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0, \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega). \tag{4.2}$$

Si osservi come la limitatezza di A permetta di dedurre automaticamente la validità di (4.2) per ogni $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Data $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ vogliamo inanzitutto stabilire un risultato di esistenza di soluzioni per l'equazione (4.2) in $u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)$. Faremo ciò vedendo (4.2) come l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))dx = \int_\Omega A(x)[\nabla u(x), \nabla u(x)]dx,$$

e dimostrando l'esistenza di minimi per F su $u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)$. Per ottenere questo risultato di esistenza è cruciale assumere l'uniforme ellitticità del campo di matrici A, i.e. l'esistenza di una costante $\lambda > 0$ tale che risulti

$$A(x)[\tau, \tau] \ge \lambda|\tau|^2, \tag{4.3}$$

per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$ e per q.o. $x \in \Omega$.

Teorema 4.1. *Se Ω è un aperto limitato, se $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ soddisfa* (4.1) *e* (4.3), *e se $u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$, allora il problema variazionale*

$$m = \inf\left\{\int_\Omega A[\nabla u, \nabla u] : u \in u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)\right\}, \tag{4.4}$$

ammette un'unico minimo u, che soddisfa l'equazione ellittica (4.2). *Viceversa, se $u \in u_0 + W^{1,2}_0(\Omega)$ risolve l'equazione ellittica* (4.2) *allora u è un minimo per il problema variazionale* (4.4).

Osservazione 4.1. L'ipotesi di ellitticità uniforme è necessaria ad ottenere un tale risultato di esistenza. Ad esempio nel caso $n = 1$ si consideri il problema variazionale

$$m = \inf\left\{F(u) : u \in u_0 + W^{1,2}_0((0,1))\right\}, \qquad F(u) = \int_0^1 x^\alpha\, u'(x)^2 dx,$$

dove $\alpha > 0$ e $u_0(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Affermiamo che se $\alpha > 1$ allora non esistono minimi in questo problema, in quanto $m = 0$ ma $F(u) > 0$ per ogni $u \in u_0 \in W^{1,2}_0((0,1))$. Per verificare la prima affermazione consideriamo infatti la successione

$$u_h(x) = \begin{cases} hx, & x \in (0, h^{-1}), \\ 1, & x \in (h^{-1}, 1). \end{cases}$$

Allora $u_h \in u_0 + W_0^{1,2}((0,1))$ con

$$F(u_h) = \int_0^{1/h} x^\alpha h^2 \, dx = \frac{h^{1-\alpha}}{1+\alpha} \to 0\,,$$

per $h \to \infty$. D'altra parte se $F(u) = 0$ allora dal Lemma 2.6 la u deve essere costante. Tuttavia non esiste nessuna costante $c \in \mathbb{R}$ tale che risulti $c + u_0 \in W_0^{1,2}((0,1))$.

Dimostrazione del Teorema 4.1: Passo uno: Sia $u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$. Date $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$ per bi-linerità abbiamo

$$F(u + t\varphi) = F(u) + 2t \int_\Omega A[\nabla u, \nabla \varphi] + t^2 F(\varphi)\,. \tag{4.5}$$

Osserviamo che $F(\varphi) \geq 0$ in quanto $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}$ per q.o. $x \in \Omega$. Pertanto u è un minimo di (4.4) se e soltanto se $\int_\Omega A[\nabla u, \nabla \varphi] = 0$ per ogni $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, i.e. se e soltanto se u risolve (4.2) in $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$. Assumiamo ora l'uniforme ellitticità (4.3), e dimostriamo che se u e v sono minimi di (4.4) allora $u = v$ q.o. in Ω. Infatti, applicando la (4.5) a $\varphi = v - u$ troviamo che

$$m \leq F(u + t(v-u)) = F(u) + t^2 F(v-u) = \Phi(t)\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Dovendo essere $\Phi(0) = \Phi(1) = m$, grazie alla (4.3) troviamo dunque

$$0 = F(v-u) \geq \lambda \int_\Omega |\nabla(v-u)|^2\,.$$

Poichè $v - u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ dalla (2.57) troviamo quindi $u = v$ q.o. su Ω.

Passo due: Rimane dunque da dimostrare l'esistenza di un minimo in (4.4) sotto l'ipotesi di uniforme ellitticità (4.3). Sia infatti $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset (u_0 + W_0^{1,2}(\Omega))$ una successione minimizzante in (4.4). Dalla (4.3) troviamo

$$F(u_0) \geq m = \lim_{h\to\infty} F(u_h) \geq \lambda \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_h|^2\,.$$

Poichè $\lambda > 0$ deduciamo quindi che $\{\nabla u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 2.30 esiste quindi $u \in (u_0 + W_0^{1,2}(\Omega))$ tale che, a meno di estrarre sottosuccessioni, $u_h \to u$ in $L^2(\Omega)$ e $\nabla u_h \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega)$. Dimostrando che

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla u] \leq \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega A[\nabla u_h, \nabla u_h]\,. \tag{4.6}$$

e applicando il metodo diretto dimostriamo quindi che u è un minimo in (4.4). Infatti grazie a (4.3) e per simmetria di A abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \int_\Omega A[\nabla(u-u_h), \nabla(u-u_h)] \qquad (4.7) \\ &= \quad \int_\Omega A[\nabla u, \nabla u] + \int_\Omega A[\nabla u_h, \nabla u_h] - 2\int_\Omega A[\nabla u, \nabla u_h]\,. \end{aligned}$$

Poichè $A[\nabla u, \nabla u_h] = (A\nabla u)\cdot(\nabla u_h)$ con $A\nabla u \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $\nabla u_h \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, risulta $\int_\Omega A[\nabla u, \nabla u_h] \to \int_\Omega A[\nabla u, \nabla u]$ e quindi la (4.7) implica la (4.6), come desiderato. □

4.1.2. *Disuguaglianza di Caccioppoli e Teorema dei rapporti incrementali.* In questa sezione introduciamo due strumenti fondamentali nello studio della regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche in forma di divergenza. Il primo strumento è la disuguaglianza di Caccioppoli, anche nota come disuguaglianza di Poincaré inversa.

Lemma 4.2 (Disuguaglianza di Caccioppoli)**.** *Se $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ soddisfa* (4.1) *e* (4.3)*, e se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ risolve*

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,, \tag{4.8}$$

allora vale la stima

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \le \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_R(x)} |u|^2\,, \tag{4.9}$$

per ogni $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$.

Osservazione 4.2. Se u risolve (4.8) allora $u - t$ risolve (4.8) per ogni $t \in \mathbb{R}$. Inoltre,

$$\inf\left\{\int_{B_R(x)} |u-t|^2 : t \in \mathbb{R}\right\} = \int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,R}|^2\,, \tag{4.10}$$

e dunque la (4.9) si migliora nella

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \le \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_R(x)} |u - (u)_{x,R}|^2\,, \tag{4.11}$$

da confrontarsi con la disuguaglianza di Poincaré (3.25) per $p = 2$.

Dimostrazione del Lemma 4.2: Fissati x, r ed R come nell'enunciato, consideriamo una funzione cut-off ζ fra $B_r(x)$ e $B_R(x)$, i.e.

$$\zeta \in C^\infty_c(B_R(x); [0,1])\,, \quad \zeta = 1 \text{ su } B_r(x), \quad |\nabla\zeta| \le \frac{C}{R-r}\,.$$

La funzione $\varphi = \zeta^2 u$ appartiene a $W^{1,2}(\Omega)$ ed ha supporto compatto. Per densità si verifica allora che è lecito testare la (4.8) con questa scelta di φ. Si trova facilmente

$$\begin{aligned} \lambda \int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 &\le \int_\Omega \zeta^2 A[\nabla u, \nabla u] = -\int_\Omega A[\nabla u, 2\,u\,\zeta\,\nabla\zeta] \\ &\le 2\Lambda \int_\Omega \zeta |\nabla u|\, u |\nabla\zeta| \le 2\Lambda \left(\int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega u^2 |\nabla\zeta|^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle proprietà di ζ si deduce che

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \le \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_R(x)\setminus B_r(x)} |u|^2\,, \tag{4.12}$$

da cui (4.9) segue immediatamente. □

Il secondo strumento che andiamo ad introdurre collega l'esistenza di derivate distribuzionali alle proprietà di limitatezza uniforme dei rapporti incrementali. Dati un aperto Ω e $h \ne 0$ consideriamo nel seguito l'aperto

$$\Omega_h = \{x \in \Omega : d(x) > |h|\}\,, \qquad d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)\,.$$

Date $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\tau \in S^{n-1}$ definiamo una funzione $\tau_h u \in L^1_{loc}(\Omega_h)$, il rapporto incrementale di passo h nella direzione τ di u, ponendo

$$\tau_h u(x) = \frac{u(x + h\tau) - u(x)}{h}\,, \qquad x \in \Omega_h\,.$$

Con un semplice cambiamento di variabili troviamo la formula di Gauss-Green discreta

$$\int_\Omega u\tau_h v = \int_\Omega v\tau_{-h}u\,,$$

che è valida per $|h|$ sufficientemente piccolo non appena una fra $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ abbia supporto compattamente contenuto in Ω e risulti limitata.

Teorema 4.3 (Teorema dei rapporti incrementali)**.** *Sia $p \in (1, \infty)$, Ω un aperto limitato.*

(I) *Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $\tau_h u \in L^p(\Omega_h)$ con*

$$\|\tau_h u\|_{L^p(\Omega_h)} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\,,$$

per ogni $\tau \in S^{n-1}$ e $h \neq 0$.

(II) *Sia $u \in L^p(\Omega)$ tale che, per ogni Ω' ben contenuto in Ω, risulti*

$$C(\Omega') = \limsup_{|h|\to 0} \sup_{\tau \in S^{n-1}} \|\tau_h u\|_{L^p(\Omega')} < \infty\,. \tag{4.13}$$

Allora $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $\tau_h u \to \nabla u \cdot \tau$ fortemente in $L^p_{loc}(\Omega)$ e

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega')} \le C(\Omega')\,.$$

Dimostrazione. Passo uno: Dimostriamo la parte (I). Si può considerare direttamente il caso $u \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. In questo caso, per ogni $x \in \Omega_h$,

$$\tau_h u(x) = \frac{1}{h}\int_0^h \nabla u(x + s\tau)\cdot\tau\, ds\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} |\tau_h u(x)|^p dx &\le \int_{\Omega_h} dx \left(\frac{1}{h}\int_0^h |\nabla u(x + s\tau)|\, ds\right)^p \\ &\le \int_{\Omega_h} dx \frac{1}{h}\int_0^h |\nabla u(x + s\tau)|^p\, ds \le \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx\,,\end{aligned}$$

come desiderato.

Passo due: Dimostriamo la parte (II) dell'enunciato. Dato $\tau \in S^{n-1}$, in virtù della (4.13) e per il criterio di compattezza debole in L^p, troviamo una successione $h_k \to 0$ ed una funzione $g \in L^p_{loc}(\Omega)$ tali che $\tau_{h_k} u \rightharpoonup g$ in $L^p_{loc}(\Omega)$. Se $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, allora $\tau_h\varphi \to \nabla\varphi\cdot\tau$ uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per $|h| \to 0$. Pertanto troviamo

$$\int_\Omega g\varphi = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega (\tau_{h_k} u)\,\varphi = \lim_{k\to\infty} -\int_\Omega u(\tau_{-h_k}\varphi) = -\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\,,$$

cioè g è la derivata debole nella direzione τ di u. Pertanto $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ e vale la stima desiderata per la norma L^p del gradiente. Fissiamo ora Ω' ben contenuto in Ω, e prendiamo Ω'' ben contenuto in Ω tale che $\Omega' \subset (\Omega'')_h$. Presa una qualunque funzione $v \in C_c^\infty(\Omega)$, per $|h|$ sufficientemente piccolo, abbiamo

$$\tau_h u - \nabla u \cdot \tau = \tau_h(u - v) + (\tau_h v - \nabla v \cdot \tau) + \nabla(v - u) \cdot \tau\,,$$

in ogni punto di Ω'. Utilizzando la stima provata in (I) si ha allora

$$\|\tau_h u - \nabla u \cdot \tau\|_{L^p(\Omega')} \leq 2\|\nabla(u - v)\|_{L^p(\Omega'')} + \|\tau_h v - \nabla v \cdot \tau\|_{L^p(\Omega')}\,.$$

Poichè $\tau_h v$ converge uniformemente a $\nabla v \cdot \tau$ su Ω' risulta

$$\limsup_{|h|\to 0} \|\tau_h u - \nabla u \cdot \tau\|_{L^p(\Omega')} \leq 2\|\nabla(u - v)\|_{L^p(\Omega'')}\,,$$

col membro di destra che può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo opportunamente $v \in C_c^\infty(\Omega)$ in quanto, come abbiamo già dimostrato, $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. □

4.1.3. *Regolarità delle soluzioni delle equazioni ellittiche a coefficienti costanti.* In questa sezione dimostriamo la regolarità C^∞ delle soluzioni di un'equazione ellittica a coefficienti costanti. Questo risultato verrà stabilito combinando le disuguaglianze di Sobolev e Morrey con la disuguaglianza di Caccioppoli e con la tecnica dei rapporti incrementali. Ricordiamo che se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}$ allora esistono due costanti positive $\lambda \leq \Lambda$ tali che $\lambda|\tau|^2 \leq A[\tau,\tau]$ e $|A[\tau,\eta]| \leq \Lambda|\tau||\eta|$ per ogni $\tau,\eta \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4 (Equazioni ellittiche a coefficienti costanti). *Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}$ e sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che risulti*

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0\,, \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,. \tag{4.14}$$

Allora $u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ con

$$\int_{B_r(x)} |\nabla^k u|^2 \leq \frac{C(k,\Lambda/\lambda)}{(R-r)^{2k}} \int_{B_R(x)} |u|^2\,, \tag{4.15}$$

per ogni $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x)$. In particolare, $u \in C^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. Testiamo (4.14) su una generica $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e sulla funzione $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ definita da $\psi(x) = \varphi(x - h\tau)$, per $\tau \in S^{n-1}$ fissato. Sottraendo le due equazioni risultanti si trova che

$$\int_\Omega A[\nabla(\tau_h u), \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,, \tag{4.16}$$

per ogni $\tau \in S^{n-1}$ ed $|h|$ sufficientemente piccolo. In particolare anche $\tau_h u$ soddisfa la disuguaglianza di Caccioppoli. Siano $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x)$ e definiamo $\{r_k\}_{k=0}^3$ in modo che

$$r_0 = r < r_1 < r_2 < r_3 = R\,, \quad r_{k+1} - r_k = \frac{R-r}{3}\,.$$

Per il Teorema dei rapporti incrementali, parte (I), e grazie alla disuguaglianza di Caccioppoli (applicata ad u e a $\tau_h u$), troviamo che

$$\int_{B_r(x)} |\nabla(\tau_h u)|^2 \;\leq\; \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_{r_1}(x)} |\tau_h u|^2 \leq \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^2} \int_{B_{r_2}(x)} |\nabla u|^2$$

$$\leq \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^4}\int_{B_R(x)}|u|^2\,.$$

Tenendo conto del fatto che $\nabla(\tau_h u) = \tau_h(\nabla u)$, per il Teorema dei rapporti incrementali, parte (II), troviamo $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ con

$$\int_{B_r(x)}|\nabla^2 u|^2 \leq \frac{C(\Lambda/\lambda)}{(R-r)^4}\int_{B_R(x)}|u|^2\,,$$

e $\tau_h(\nabla u) \to \nabla(\partial u/\partial\tau)$ fortemente in $L^2_{\rm loc}(\Omega)$. Passando dunque al limite in (4.16) si vede che $v = \partial u/\partial\tau$ è una soluzione di (4.30), cioè le derivate direzionali di u sono soluzioni della stessa equazione ellittica a coefficienti costanti risolta da u. Iterando allora l'argomento si dimostra che $u \in W^{k,2}_{loc}(\Omega)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e che vale la (4.15). In particolare, $u \in C^\infty(\Omega)$ per le disuguaglianze di Sobolev e Morrey. □

4.1.4. *Equazioni ellittiche per il gradiente di un minimo.* Dimostriamo adesso che le derivate direzionali di un minimo soddisfano opportune equazioni ellittiche in forma di divergenza. Ricordiamo che $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è convessa se e solo $\nabla^2 f(\xi) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. Diremo che $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è uniformemente convessa se esiste $\lambda > 0$ tale che risulti

$$\nabla^2 f(\xi)[\tau,\tau] \geq \lambda|\tau|^2\,,$$

per ogni $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.5. *Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uniformemente convessa con $\nabla^2 f$ limitato su $\mathbb{R}^n$, sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che risulti*

$$\int_\Omega \nabla f(\nabla u)\cdot\nabla\varphi = 0\,,\qquad \forall\varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,, \tag{4.17}$$

e si definisca $A \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ ponendo

$$A(x) = \nabla^2 f(\nabla u(x))\,,\qquad x \in \Omega\,.$$

Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e dato $\tau \in S^{n-1}$ la derivata debole di u nella direzione τ,

$$v = \frac{\partial u}{\partial\tau} = (\nabla u)\cdot\tau\,,$$

è soluzione dell'equazione ellitica in forma debole associata ad A, i.e.

$$\int_\Omega A[\nabla v,\nabla\varphi] = 0\,,\qquad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)\,. \tag{4.18}$$

Dimostrazione: Siano $\tau \in S^{n-1}$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$. Data $\varphi \in C^\infty_c(\Omega')$ e posto $\psi(x) = \varphi(x-h\tau)$, per $|h| < h_0 = \mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ risulta $\psi \in C^\infty_c(\Omega)$. Testando la (4.20) su φ e ψ e cambiando variabili si trova allora che

$$\int_\Omega \frac{\nabla f(\nabla u(x+h\tau)) - \nabla f(\nabla u(x))}{h}\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = 0\,.$$

Poichè $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ per ogni $x \in \Omega'$ abbiamo

$$\frac{\nabla f(\nabla u(x+h\tau)) - \nabla f(\nabla u(x))}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt}(\nabla f(t\nabla u(x+h\tau) + (1-t)\nabla u(x)))dt$$

$$= \quad A_{\tau,h}(x)\tau_h \nabla u(x)$$

dove si è posto

$$A_{\tau,h}(x) = \int_0^1 \nabla^2 f(t\nabla u(x+h\tau) + (1-t)\nabla u(x))dt\,,$$

$$\tau_h \nabla u(x) = \frac{\nabla u(x+h\tau) - \nabla u(x)}{h} = \nabla(\tau_h u)(x)\,.$$

Dunque, se $|h| < h_0$, allora $\tau_h u$ soddisfa

$$\int_\Omega A_{\tau,h}[\nabla(\tau_h u), \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega')\,. \tag{4.19}$$

Le matrici $A_{\tau,h}$ definiscono delle equazioni ellittiche, in quanto $A_{\tau,h} \in L^\infty(\Omega'; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ con $|A_{\tau,h}| \le \Lambda$ in Ω' e con

$$A_{\tau,h}(x)[\xi,\xi] \ge \lambda|\xi|^2\,, \quad \forall x \in \Omega'\,, \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Un semplice ragionamento di densità dimostra inoltre che (4.19) è valida per ogni $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega')$. Siano ora $x \in \Omega'$ e $r > 0$ tali che $0 < 3r < d(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Per la disuguaglianza di Caccioppoli e per il Teorema dei rapporti incrementali, parte (I), abbiamo che se $|h| < r$,

$$\int_{B_r(x)} |\nabla(\tau_h u)|^2 \le \frac{C(\Lambda/\lambda)}{r^2}\int_{B_{2r}(x)} |\tau_h u|^2 \le \frac{C(\Lambda/\lambda)}{r^2}\int_{B_{3r}(x)} |\nabla u|^2\,.$$

Consideriamo dunque il ricoprimento aperto di Ω' definito da

$$\{B_r(x) : x \in \Omega'\,, 0 < 3r < d(x)\}\,.$$

Per compattezza esiste $\Omega'' \subset\subset \Omega$ (l'insieme Ω'' sarà dato da un unione finita di palle del tipo $B_{3r}(x)$ con $x \in \Omega'$ e $3r < d(x)$) tale che risulti

$$\int_{\Omega'} |\nabla(\tau_h u)|^2 \le C(\Lambda/\lambda, \Omega')\int_{\Omega''} |\nabla u|^2\,.$$

Poichè $\nabla(\tau_h u) = \tau_h(\nabla u)$, da questa stima e dal Teorema dei rapporti incrementali, parte (II), segue che $\nabla u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ (i.e., $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$), con

$$\nabla(\tau_h u) \to (\nabla^2 u)\tau = \nabla v\,,$$

fortemente in $L^2_{loc}(\Omega)$. Poichè $A_{\tau,h} \to A$ q.o. in Ω con $\max\{|A_{\tau,h}|, |A|\} \le \Lambda$, non è difficile passare a limite in (4.19) e verificare di conseguenza la validità di (4.18). □

Il Teorema 4.5 si applica essenzialmente ai soli funzionali in crescita quadratica. Tuttavia, nel caso si stiano studiando dei minimi Lipschitziani come quelli trovati nel Teorema 2.18, possiamo facilmente adattare il ragionamento precedente al fine di studiare classi più ampie di funzionali. A tal fine introduciamo la seguente definizione. Diremo che $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è localmente uniformemente convessa se per ogni $R > 0$ esiste $\lambda(R) > 0$ tale che risulti

$$\nabla^2 f(\xi)[\tau,\tau] \ge \lambda(R)|\tau|^2\,,$$

per ogni $\xi \in B_R$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.6. *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *localmente uniformemente convessa, sia* $u \in \mathrm{Lip}(\Omega)$ *tale che risulti*

$$\int_\Omega \nabla f(\nabla u) \cdot \nabla \varphi = 0\,, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,, \tag{4.20}$$

e si definisca $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ *ponendo*

$$A(x) = \nabla^2 f(\nabla u(x))\,, \qquad x \in \Omega\,.$$

Allora $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ *ed ogni derivata direzionale* v *di* u *è soluzione dell'equazione ellittica* (4.18).

Dimostrazione: Si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 4.5. Si osservi che il campo di matrici $A = \nabla^2 f(\nabla u)$ soddisfa le condizioni (4.1) e (4.3) (nonostante adesso f sia solo localmente uniformemente convessa e $\nabla^2 f$ sia soltanto localmente limitato) proprio in virtù della limitatezza di ∇u. □

Esempio 4.1. Consideriamo il funzionale dell'area, corrispondente all'integrando $f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. In questo caso

$$\nabla^2 f(\xi) = \frac{(1 + |\xi|^2)\mathrm{Id} - \xi \otimes \xi}{(1 + |\xi|^2)^{3/2}}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Pertanto se $|\xi| \le R$, tenendo presente che $(\tau \cdot \xi)^2 \le |\xi|^2 |\tau|^2$,

$$\nabla^2 f(\xi)[\tau, \tau] = \frac{(1 + |\xi|^2)|\tau|^2 - (\tau \cdot \xi)^2}{(1 + |\xi|^2)^{3/2}} \ge \frac{|\tau|^2}{(1 + |\xi|^2)^{3/2}} \ge \lambda(R)|\tau|^2\,,$$

per $\lambda(R) = (1 + R^2)^{-3/2}$. In particolare i minimi Lipschitziani del funzionale dell'area in un aperto Ω appartengono automaticamente a $W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.

4.2. **Equazioni ellittiche a coefficienti hölderiani.** In virtù dei Teoremi 4.5 e 4.6 siamo ora interessati a studiare la regolarità di soluzioni per equazioni ellittiche del tipo $\mathrm{div}\,(A\nabla u) = 0$ per A soddisfacente (4.1) e (4.3). Abbiamo visto come il caso in cui A risulti costante segua facilmente dai Teoremi di Morrey e Sobolev, dalla disuguaglianza di Caccioppoli e dal teorema dei rapporti incrementali. Estenderemo inizialmente questo risultato al caso in cui il campo di matrici A sia hölderiano.

4.2.1. *Oscillazione media ed hölderianità.* Studiamo qui un criterio dovuto a Campanato che caratterizza la proprietà di hölderianità di una funzione in termini della velocità di decadimento della sua oscillazione media. Date $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $r < d(x)$ definiamo *l'oscillazione in media* L^p *di* u *su* $B_r(x)$

$$\omega_p(x, r) = \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^p\right)^{1/p}\,.$$

Dal teorema dei punti di Lebesgue, per q.o. $x \in \Omega$ risulta $\omega_p(x, r) \to 0$ quando $r \to 0^+$.

Lemma 4.7. *Se* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, *allora per q.o.* $x \in \Omega$ *abbiamo*

$$\lim_{r \to 0^+} \omega_p(x, r) = 0\,.$$

Dimostrazione: Poichè $|u - q|^p \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$, ragionando come nella dimostrazione del Teorema dei punti di Lebesgue troviamo subito che esiste $E \subset \Omega$ tale che $|E| = 0$ e per ogni $x \in \Omega \setminus E$

$$\lim_{r \to 0^+} \left(\fint_{B_r(x)} |u - u(x)|^p \right)^{1/p} = 0 \,.$$

Dalla disuguaglianza di Jensen, per ogni tale x risulta anche $(u)_{x,r} \to u(x)$. Applicando la disuguaglianza triangolare in L^p si trova allora

$$\left(\fint_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^p \right)^{1/p} \leq \left(\fint_{B_r(x)} |u - u(x)|^p \right)^{1/p} + |u(x) - (u)_{x,r}| \,,$$

da cui segue la tesi. □

Se $1 \leq p < \infty$, $\alpha \in (0, 1]$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $u \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ allora si vede facilmente che

$$\omega_p(x, r) \leq C(n, p)[u]_{\alpha,\Omega'} r^\alpha \,, \qquad \forall x \in \Omega' \,, r \in (0, d(\Omega')) \,.$$

Il criterio di Campanato assicura che, viceversa, se la velocità del decadimento a zero di $\omega_p(x, r)$ è quantificabile con una potenza r^α per un certo $\alpha \in (0, 1]$, allora la funzione u è (equivalente ad una funzione) α-hölderiana (Lipschitziana se $\alpha = 1$).

Teorema 4.8 (Criterio di Campanato)**.** *Dati $n \geq 2$, $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$ esiste una costante $C(n, p, \alpha)$ con la seguente proprietà. Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, ed esistono due costanti positive K ed R_0 tali che risulti $R_0 \leq d(\Omega')$*

$$\omega_p(x, r) \leq K\, r^\alpha \,, \qquad \forall x \in \Omega' \,, r \in (0, R_0) \,, \tag{4.21}$$

allora esiste $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ tale che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω' e

$$[u]_{\alpha,\Omega'} \leq C(n, p, \alpha)\, K \,.$$

Dimostrazione: Passo uno: Poichè $R_0 < d(\Omega')$, per ogni $r < R_0$ possiamo definire una funzione continua $v_r : \Omega' \to \mathbb{R}$ ponendo $v_r(x) = (u)_{x,r}$, $x \in \Omega'$. Iniziamo dimostrando che se $r < R < R_0$ allora

$$|v_r(x) - v_R(x)| \leq C(n, p)\, K \left(\frac{R}{r} \right)^{n/p} R^\alpha \,, \qquad \forall x \in \Omega' \,. \tag{4.22}$$

Integrando la disuguaglianza

$$|v_r(x) - v_R(x)|^p \leq 2^{p-1} \left(|(u)_{x,r} - u(z)|^p + |(u)_{x,R} - u(z)|^p \right) \,,$$

su $z \in B(x, r)$ troviamo infatti

$$\begin{aligned} \omega_n r^n |v_r(x) - v_R(x)|^p &\leq 2^{p-1} \left(\int_{B(x,r)} |(u)_{x,r} - u|^p + \int_{B(x,R)} |(u)_{x,R} - u|^p \right) \\ &\leq 2^{p-1} K^p \left(r^{n+\alpha p} + R^{n+\alpha p} \right) \leq 2^p K^p R^{n+\alpha p} \,, \end{aligned}$$

da cui la (4.22) segue immediatamente. Dato dunque $r < R_0$ poniamo $r_k = 2^{-k}r$ e applichiamo la (4.22) ripetutamente per trovare, per $x \in \Omega'$ e $0 \le h < k$,

$$|v_{r_h}(x) - v_{r_k}(x)| \le \sum_{j=h}^{k-1} |v_{r_{j+1}}(x) - v_{r_j}(x)| \le C(n,p)\, K \sum_{j=h}^{k-1} 2^{-\alpha j}\, r^\alpha \,. \tag{4.23}$$

In particolare $\{v_{r_h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^0(\Omega')$. Pertanto esiste una funzione $\overline{u}$ continua su Ω' tale che risulti $v_{r_h} \to \overline{u}$ uniformemente su Ω'. Per il Teorema dei punti di Lebesgue $\overline{u} = u$ q.o. in Ω'. Per arbitrarietà di Ω' si è dunque provato che u coincide q.o. con una funzione continua in Ω. Osserviamo inoltre che scegliendo $h = 0$ e passando al limite $k \to \infty$, dalla (4.23) segue che

$$|u(x) - v_r(x)| \le C(n,p,\alpha) K\, r^\alpha \,,$$

per q.o. $x \in \Omega'$, da cui troviamo la stima

$$|\overline{u}(x) - v_r(x)| \le C(n,p,\alpha) K\, r^\alpha \,, \tag{4.24}$$

per ogni $x \in \Omega'$, che quantifica la convergenza uniforme delle v_r a $\overline{u}$ in Ω'.

Passo due: Siano adesso $x, y \in \Omega'$, poniamo $r = |x - y|$, e integriamo la stima

$$|v_r(x) - v_r(y)|^p \le 2^{p-1} \left(|(u)_{x,r} - u(z)|^p + |(u)_{y,r} - u(z)|^p \right) ,$$

su $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$. Posto $\kappa(n) = |B \cap (B + e)|$ per $e \in S^{n-1}$, risulta

$$\kappa(n) r^n |v_r(x) - v_r(y)|^p \le 2^{p-1} \left(\int_{B(x,r)} |(u)_{x,r} - u|^p + \int_{B(y,r)} |(u)_{y,r} - u|^p \right) ,$$

da cui concludiamo

$$|v_r(x) - v_r(y)| \le C(n,p)\, K r^\alpha \,, \qquad r = |x - y| \,. \tag{4.25}$$

Combiniamo la (4.25) con la (4.24) per dedurre che se $x, y \in \Omega'$ sono punti di Lebesgue di u allora

$$|u(x) - u(y)| \le C(n,p,\alpha) K |x - y|^\alpha \,.$$

□

Il criterio di Campanato può essere riformulato in termini di una condizione di decadimento della norma del gradiente su palle di raggio decrescente a zero.

Corollario 4.9 (Criterio di Morrey). *Dati $n \ge 2$, $p \in [1, \infty)$, $\alpha \in (0, 1]$ esiste una costante $C(n,p,\alpha)$ con la seguente proprietà. Se $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$, ed esistono due costanti positive K ed R_0 tali che risulti $R_0 \le d(\Omega')$ e*

$$\left(\frac{1}{r^{n-p}} \int_{B_r(x)} |\nabla u|^p \right)^{1/p} \le K\, r^\alpha \,, \quad \forall x \in \Omega' \,, r \in (0, R_0) \,, \tag{4.26}$$

allora esiste $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ tale che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω' e

$$[u]_{\alpha,\Omega'} \le C(n,p,\alpha)\, K \,.$$

Dimostrazione: Se $x \in \Omega'$ ed $r < R_0$ per la disuguaglianza di Poincaré (3.25) e per la (4.26) abbiamo

$$\int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^p \leq C(n) r^p \int_{B_r(x)} |\nabla u|^p \leq C(n) r^p \, K \, r^{n-p+\alpha p} \, .$$

La tesi segue dunque dal criterio di Campanato. □

4.2.2. *Stime di decadimento per equazioni a coefficienti costanti.* Dimostriamo ora delle stime di decadimento di tipo Campanato per le soluzioni delle equazioni ellittiche a coefficienti costanti. Come vedremo, a partire da esse potremo provare delle stime di decadimento appena più deboli nel caso delle equazioni ellittiche a coefficienti hölderiani.

Teorema 4.10 (Stime di decadimento)**.** *Nelle ipotesi del Teorema 4.4, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$,*

$$\int_{B_r(x)} |\nabla^k u|^2 \leq C(n, \Lambda/\lambda) \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla^k u|^2 \tag{4.27}$$

$$\int_{B_r(x)} |\nabla^k u - (\nabla^k u)_{x,r}|^2 \leq C(n, \Lambda/\lambda) \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x)} |\nabla^k u - (\nabla^k u)_{x,R}|^2 \, , \tag{4.28}$$

dove $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x)$.

Dimostrazione. Poichè u e tutte le sue derivate risolvono la stessa equazione ellittica a coefficienti costanti, basta considerare il caso $k = 0$ ($\nabla^0 u = u$). Sia $k = k(n)$ tale che $W^{k,2}$ si immerga in L^∞. Allora per ogni $x \in \Omega$ e $0 < r < d(x)$ abbiamo

$$\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |u|^2 \leq \|u\|^2_{L^\infty(B_r(x))} \leq C(n) \|u\|^2_{W^{k,2}(B_r(x))} \, .$$

Grazie a (4.15) abbiamo quindi

$$\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |u|^2 \leq C(n, \Lambda/\lambda, R) \int_{B_R(x)} |u|^2 \, ,$$

per una qualche costante C dipendente dalle quantità indicate. Tramite riscalamento (poichè i coefficienti dell'equazione sono costanti le riscalate di una soluzione sono anch'esse soluzioni della stessa equazione ellittica) si vede che deve necessariamente essere $C(n, \Lambda/\lambda, R) = C(n, \Lambda/\lambda) R^{-n}$, e si perviene quindi alla (4.27). Dimostriamo ora (4.28). Applicando la disuguaglianza di Poincaré troviamo

$$\int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^2 \leq C(n) r^2 \int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \, .$$

Applicando dunque la prima stima di decadimento a ∇u

$$\int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^2 \leq C(n, \Lambda/\lambda) \frac{r^{n+2}}{R^n} \int_{B_{(r+R)/2}(x)} |\nabla u|^2 \, .$$

Infine, applicando la disuguaglianza di Caccioppoli ad $u - (u)_{x,r}$, troviamo

$$\int_{B_r(x)} |u - (u)_{x,r}|^2 \leq C(n, \Lambda/\lambda) \frac{r^{n+2}}{R^{n+2}} \int_{B_R(x)} |u - (u)_{x,R}|^2 \, ,$$

come desiderato. $\square$

4.2.3. *Il Teorema di Schauder.* Veniamo dunque a dimostrare un fondamentale risultato riguardante le equazioni ellittiche a coefficenti hölderiani. Nel seguito porremmo per semplicità

$$H = [A]_{\alpha,\Omega} = \sup\left\{\frac{|A(x)-A(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in \Omega\,, x \neq y\right\},$$

cosicchè risulterà

$$|A(x)-A(y)| \leq H|x-y|^\alpha\,, \quad \forall x, y \in \Omega\,. \tag{4.29}$$

Teorema 4.11 (Teorema di Schauder). *Se $A \in C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n}_{sym})$ soddisfa (4.1) e (4.3) e se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ è una soluzione dell'equazione ellittica in forma debole associata ad A, i.e.*

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)\,, \tag{4.30}$$

allora esiste $\overline{u} \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ tale che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω. Inoltre per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ risulta

$$[\nabla\overline{u}]_{\alpha,\Omega'} \leq C\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}\,,$$

dove la costante C dipende solamente da n, Ω', α, λ, Λ e H.

Iniziamo col dimostrare delle stime di decadimento per la soluzione u che differiscono da quelle presentate nel Teorema 4.10 per la presenza di una perturbazione controllata dall'hölderianità di A.

Lemma 4.12. *Nelle ipotesi del Teorema 4.11 su A ed u, dati $x \in \Omega$ e $0 < r < R < d(x)$, risulta*

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \leq C_1\left\{\left(\frac{r}{R}\right)^n + R^{2\alpha}\right\}\int_{B_R(x)} |\nabla u|^2\,. \tag{4.31}$$

dove C_1 è una costante che dipende solamente da n, Λ, λ e H.

Dimostrazione: Consideriamo la matrice simmetrica $A_0 = A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+}$. Consideriamo la soluzione v_R dell'equazione ellittica a coefficienti costanti definita da A_0 in $B_R(x)$ col dato al bordo di u. Più precisamente, sia v_R l'unica soluzione di

$$\int_\Omega A_0[\nabla v_R, \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(B_R(x))\,, \tag{4.32}$$

tale che $v_R \in u + W^{1,2}_0(B_R(x))$, ed introduciamo per brevità

$$w_R = u - v_R \in W^{1,2}_0(B_R(x))\,.$$

Poichè u risolve (4.30) e poichè v_R risolve (4.32), troviamo che w_R soddisfa l'equazione *non omogenea* a coefficienti costanti

$$\int_\Omega A_0[\nabla w_R, \nabla\varphi] = -\int_\Omega T\cdot\nabla\varphi\,, \quad \forall\varphi \in W^{1,2}_0(B_R(x))\,, \tag{4.33}$$

dove abbiamo introdotto un campo $T \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$T(y) = (A(y) - A_0)\nabla u(y)\,, \quad y \in \Omega\,.$$

La decomposizione di u in $B_R(x)$ nella somma $u = v_R + w_R$ è nota come *decomposizione di Korn*. L'hölderianità di A permette di verificare che w_R soddisfa la stima

$$\int_{B_R(x)} |\nabla w_R|^2 \leq \left(\frac{H}{\lambda}\right)^2 R^{2\alpha} \int_{B_R(x)} |\nabla u|^2 . \tag{4.34}$$

Infatti per (4.3) e (4.29), testando (4.33) con $\varphi = w_R$ troviamo immediatamente

$$\lambda \int_{B_R(x)} |\nabla w_R|^2 \leq \int_{B_R(x)} |T||\nabla w_R| \leq H\, R^\alpha \int_{B_R(x)} |\nabla u||\nabla w_R| ,$$

da cui (4.34) discende tramite la disuguaglianza di Hölder. Per dimostrare la stima di decadimento (4.31), osserviamo allora che, banalmente,

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \;\; \leq \;\; 2 \int_{B_r(x)} |\nabla v_R|^2 + 2 \int_{B_r(x)} |\nabla w_R|^2 \tag{4.35}$$

Poichè v_R risolve l'equazione a coefficienti costanti (4.32), dalla (4.27) abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |\nabla v_R|^2 \;\; &\leq \;\; C(n, \Lambda/\lambda) \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla v_R|^2 \\ &\leq \;\; C(n, \Lambda/\lambda) \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{B_R(x)} |\nabla u|^2 + \int_{B_r(x)} |\nabla w_R|^2 \right\} . \end{aligned} \tag{4.36}$$

Combinando (4.35) e (4.36) con (4.34) si trova la (4.31). □

Presentiamo ora un lemma elementare, che permette di riassorbire il termine perturbativo $R^{2\alpha}$ presente nella stima (4.31) peggiorando l'esponente del termine di decadimento $(r/R)^n$ (i.e. rimpiazzando $(r/R)^n$ con un termine più grande del tipo $(r/R)^m$, $m < n$), e a patto di lavorare al di sotto di una scala R sufficientemente piccola. L'utilizzo di simili risultati è estremamente frequente nelle dimostrazioni di regolarità.

Lemma 4.13. *Siano $a > 0$, $c_1 > 0$ e $d > 0$, e siano $f, g : (0, d) \to [0, \infty)$ due funzioni crescenti tali che $g(0^+) = 0$ e*

$$f(r) \leq c_1 \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^a + g(r) \right\} f(R) , \quad 0 < r < R \leq d . \tag{4.37}$$

Per ogni $b \in (0, a)$ esistono $d_0 \in (0, d)$ e $c_2 > 0$, dipendenti da a, b, c_1 e g, ma indipendenti da f, tali che risulti

$$f(r) \leq c_2 \left(\frac{r}{R}\right)^b f(R) , \quad 0 < r < R \leq d_0 . \tag{4.38}$$

Dimostrazione. Sia $c \in (b, a)$, e scegliamo $\tau \in (0, 1)$ in modo che risulti

$$\tau^c = 2c_1 \tau^a , \quad \text{i.e.} \quad \tau = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^{1/(a-c)} . \tag{4.39}$$

Nel seguito denoteremo con $C(\tau)$ una generica costante dipendente esclusivamente da τ, quindi da c_1, a e b (tramite c). Scegliamo $d_0 \leq d$ tale che risulti $g(d_0) \leq \tau^a$. Da (4.37) deduciamo

$$f(\tau R) \leq \tau^c f(R) , \quad 0 < R \leq d_0 ,$$

che iterata conduce a

$$f(\tau^k R) \le \tau^{kc} f(R)\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Dati $r < R \le d_0$, consideriamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $\tau^{k+1}R < r \le \tau^k R$. Troviamo

$$f(r) \le f(\tau^k R) \le \tau^{kc} f(R)\,,$$

dove

$$\tau^{kc} \le \frac{1}{\tau^c}\left(\frac{r}{R}\right)^c \le C(\tau)\left(\frac{r}{R}\right)^b\,,$$

e si conclude la dimostrazione del lemma. □

Corollario 4.14. *Nelle ipotesi del Teorema 4.11 su A ed u, dati $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $m < n$, esistono due costanti positive $R_0 \le d(\Omega')$ e C_2, dipendenti solamente da n, m, Ω', λ, Λ, α e H, tali che*

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 \le C_2 \left(\frac{r}{R}\right)^m \int_{B_R(x)} |\nabla u|^2\,, \tag{4.40}$$

per ogni $x \in \Omega'$ e $r < R \le R_0$. In particolare esiste una funzione $\overline{u} \in C^0(\Omega)$ tale che $\overline{u} \in C^{0,\gamma}_{loc}(\Omega)$ per ogni $\gamma \in (0,1)$ e $\overline{u} = u$ q.o. in Ω.

Dimostrazione: Grazie al Lemma 4.12, dato $x \in \Omega'$ e posto $f_x(r) = \int_{B_r(x)} |\nabla u|^2$ abbiamo

$$f_x(r) \le C_1 \left\{\left(\frac{r}{R}\right)^n + R^{2\alpha}\right\} f_x(R)\,, \quad r < R < d(\Omega')\,.$$

Grazie al Lemma 4.13 esistono dunque due costanti positive R_0 e C_2 aventi le dipendenze indicate tali che risulti

$$f_x(r) \le C_2 \left(\frac{r}{R}\right)^m f_x(R)\,, \quad r < R < R_0\,,$$

da cui deduciamo la validità di (4.40). Da (4.40), posto $C_3 = C_2\, R_0^{-m}$ troviamo poi

$$\left(\frac{1}{r^{n-2}} \int_{B_r(x)} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \le C_3\, r^{[m-(n-2)]/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)}\,.$$

Per ogni $\gamma \in (0,1)$ esiste $m < n$ tale che risulti $[m-(n-2)]/2 = 1 - [(n-m)/2] = \gamma$. Concludiamo pertanto grazie al criterio di Morrey (Corollario 4.9). □

Nel Corollario 4.14 abbiamo dunque dimostrato che una soluzione di un'equazione ellittica a coefficienti α-hölderiani è equivalente ad una funzione continua, e in realtà localmente γ-hölderiana per ogni $\gamma \in (0,1)$. Il Teorema di Schauder afferma in realtà che la u sia di classe $C^{1,\alpha}$. Per pervenire a questo risultato dobbiamo affinare il nostro ragionamento e produrre delle stime di decadimento per l'oscillazione media L^2 del gradiente di u. In analogia col ragionamento appena esposto, iniziamo dimostrando una stima di decadimento con perturbazione per l'oscillazione media del gradiente.

Lemma 4.15. *Nelle ipotesi del Teorema 4.11 su A ed u, siano dati $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $m < n$, e sia R_0 la costante fornita dal Lemma 4.14. Esiste allora una costante C_4, dipendente unicamente da n, m, Ω', λ, Λ, α e H, tale che risulti*

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2 \le C_4 \left\{\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,R}|^2 + R^{2\alpha+m} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2\right\}\,, \tag{4.41}$$

per ogni $x \in \Omega'$ e $r < R < R_0$.

Dimostrazione: Fissiamo $x \in \Omega'$. Per ogni $R \in (0, R_0)$ consideriamo nuovamente le funzioni v_R e w_R relative ad A, u, x ed R, introdotte nella dimostrazione del Lemma 4.12. Osserviamo inanzitutto che in virtù del Corollario 4.14 possiamo migliorare la stima (4.34), ottenendo

$$\int_{B_R(x)} |\nabla w_R|^2 \leq C_4 \, R^{2\alpha+m} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \,, \quad \forall R < R_0 \,. \tag{4.42}$$

Introduciamo adesso per brevità le funzioni

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2 \,, \quad r < d(x) \,, \\ V_R(r) &= \int_{B_r(x)} |\nabla v - (\nabla v)_{x,r}|^2 \,, \quad r < R < d(x) \,, \\ W_R(r) &= \int_{B_r(x)} |\nabla w - (\nabla w)_{x,r}|^2 \,, \quad r < R < d(x) \,. \end{aligned}$$

Poichè v_R risolve l'equazione a coefficienti costanti (4.32), essa soddisfa la stima di decadimento (4.28). Denotando con $C = C(n, \Lambda/\lambda)$ la costante che appare in tale stima troviamo pertanto

$$\begin{aligned} U(r) &\leq 2(V_R(r) + W_R(r)) \leq 2\,C\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} V_R(R) + 2W_R(R) \\ &\leq 2\,C\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} U(R) + (2+C)W_R(R) \,, \end{aligned}$$

per ogni $r < R$. D'altra parte combinando la (4.10) con la (4.42) troviamo

$$W_R(R) \leq \int_{B_R(x)} |\nabla w_R|^2 \leq C_4 \, R^{2\alpha+m} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \,,$$

per ogni $R \in (0, R_0)$, che ci porta a concludere

$$U(r) \leq C_4 \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} U(R) + R^{2\alpha+m} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \right\} \,, \tag{4.43}$$

se $r < R < R_0$, che è la (4.41). □

Andiamo adesso a migliorare la (4.41) tramite un'opportuno lemma di iterazione, atto ad eliminare il termine perturbativo $R^{2\alpha+m}$. Si osservi come il seguente lemma contenga il Lemma 4.13 come un caso particolare.

Lemma 4.16. *Siano $a > b > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ e $d > 0$, e sia $f : (0, d) \to [0, \infty)$ una funzione crescente tale che risulti*

$$f(r) \leq c_1 \left(\frac{r}{R}\right)^a f(R) + c_2 R^b \,, \quad \forall r < R \leq d \,. \tag{4.44}$$

Allora esiste una costante $c_3 > 0$, dipendente da a, b, c_1 e g, ma indipendente da f e da c_2, tale che risulti

$$f(r) \le c_3 \left\{ \frac{f(R)}{R^b} + c_2 \right\} r^b \,, \quad \forall r < R \le d\,. \tag{4.45}$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel Lemma 4.13. Fissato $c \in (b,a)$ definiamo $\tau \in (0,1)$ in modo che risulti

$$\tau^c = c_1 \tau^a\,. \tag{4.46}$$

Da (4.44) deduciamo adesso che per ogni $R < d_0$ si ha

$$f(\tau R) \le \tau^c f(R) + c_2 R^\beta\,,$$

stima che, iterata, conduce a

$$f(\tau^k R) \le \tau^{kc} f(R) + \left(\tau^{(k-1)b} \sum_{j=0}^{k-1} (\tau^{(c-b)})^j \right) c_2 R^b\,.$$

Dati $r < R \le d$ e definito $k \in \mathbb{N}$ in modo che risulti $\tau^{k+1}R < r \le \tau^k R$, allora troviamo

$$f(r) \le \tau^{kc} f(R) + C(\tau)\tau^{(k-1)b} c_2 R^b\,.$$

Esattamente come prima osserviamo che

$$\tau^{kc} \le \frac{1}{\tau^c}\left(\frac{r}{R}\right)^c \le C(\tau)\left(\frac{r}{R}\right)^b\,.$$

Inoltre abbiamo,

$$\tau^{(k-1)b} R^b \le \left(\frac{r}{\tau^2 R}\right)^b R^b = C(\tau) r^b\,,$$

e dunque concludiamo la dimostrazione del lemma. □

Siamo infine nella posizione di dimostrare il Teorema di Schauder.

Dimostrazione del Teorema 4.11: Dati $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $m < n$, consideriamo la stima di decadimento perturbata per l'oscillazione media L^2 di ∇u fornita nella (4.41). Applicando il Lemma 4.16 dimostriamo l'esistenza di una costante positiva C_5 dipendente solamente da n, m, Ω', λ, Λ, α e H, tale che risulti

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2 \le C_5\, r^{2\alpha+m} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2\,, \tag{4.47}$$

per ogni $x \in \Omega'$ e $r \in (0, R_0)$. Dato $\beta \in (0,\alpha)$ possiamo sempre trovare $m < n$ tale che risulti

$$\beta = \alpha - \frac{n-m}{2}\,.$$

Corrispondentemente la (4.47) prende la forma

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2 \right)^{1/2} \le \sqrt{C_5}\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)}\, r^\beta\,.$$

Per il criterio di Campanato risulta dunque che, a patto di modificare u su un insieme di misura nulla, $u \in C^{1,\beta}(\Omega')$ con

$$[\nabla u]_{\beta,\Omega'} \leq C_6 \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} \,,$$

per una costante C_6 dipendente da n, Ω', λ, Λ, α, β ed H. Dati $x, y \in \Omega'$, integrando la stima

$$|\nabla u(x)| \leq |\nabla u(y)| + C_6 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} |x-y|^\beta \,,$$

su $y \in \Omega'$, troviamo allora che

$$\begin{aligned} |\Omega'| \sup_{\Omega'} |\nabla u| &\leq \int_{\Omega'} |\nabla u| + C_6 |\Omega'| \mathrm{diam}(\Omega')^\beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \left\{ |\Omega'|^{1/2} + C_6 |\Omega'| \mathrm{diam}(\Omega')^\beta \right\} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} \,. \end{aligned}$$

Consideriamo dunque questa stima con la scelta $\beta = \alpha/2$ e applichiamo la disuguaglianza di Hölder per dedurre che

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C_7 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} \,, \tag{4.48}$$

dove C_7 dipende unicamente da n, Ω', λ, Λ, α e H. In virtù della stima (4.48) la (4.34) potrà dunque migliorarsi non già nella stima (4.42), ma nella stima più forte

$$\int_{B_R(x)} |\nabla w_R|^2 \leq C_8 \; R^{2\alpha+n} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \,, \tag{4.49}$$

valida per ogni $R \leq R_0$, dove l'esponente arbitrario $m < n$ viene rimpiazzato da n. E' immediato osservare come il ragionamento del Lemma 4.14 si possa dunque ripetere con n al posto di m, portando adesso a stabilire tramite l'utilizzo del Lemma 4.16 la stima di decadimento

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u - (\nabla u)_{x,r}|^2 \leq C_9 \, r^{2\alpha+n} \int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \,, \tag{4.50}$$

per C_9 dipendente unicamente da n, Ω', λ, Λ, α e H. Applicando nuovamente il criterio di Campanato troviamo quindi che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega')$ con

$$[\nabla u]_{\alpha,\Omega'} \leq C_{10} \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega';\mathbb{R}^n)} \,.$$

Si conclude così la dimostrazione del teorema. □

4.3. **Equazioni ellittiche a coefficienti misurabili.** Discutiamo infine la teoria della regolarità per equazioni ellittiche del tipo $\mathrm{div}\,(A\nabla u) = 0$ nella sola ipotesi che $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ soddisfi le (4.1) e (4.3).

4.3.1. *Classi di De Giorgi.* Il teorema di regolarità di De Giorgi [7] permette di dimostrare il carattere hölderiano di ogni funzione soddisfacente un'opportuna variante della disuguaglianza di Caccioppoli. Più precisamente, la teoria di De Giorgi si occupa di studiare quelle funzioni $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ che, per un qualche $\gamma > 0$, soddisfino le disuguaglianze

$$\int_{E(t,r)} |\nabla u|^2 \le \frac{\gamma}{(R-r)^2} \int_{E(t,R)} (u-t)^2 \tag{4.51}$$

$$\int_{F(t,r)} |\nabla u|^2 \le \frac{\gamma}{(R-r)^2} \int_{F(t,R)} (u-t)^2 \tag{4.52}$$

per ogni $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x)$, $t \in \mathbb{R}$, dove si è posto

$$E(t,r) = \{u > t\} \cap B_r(x)\,, \quad F(t,r) = \{u < t\} \cap B_r(x)\,.$$

Denotiamo con $DG_\gamma(\Omega)$ l'insieme di tali funzioni. E' utile osservare che $u \in DG_\gamma(\Omega)$ se e solo se $-u \in DG_\gamma(\Omega)$. Il principale teorema che dimostreremo sarà dunque il seguente:

Teorema 4.17 (Teorema di De Giorgi)**.** *Se $n \ge 2$ e $\gamma > 0$ allora esiste $\alpha = \alpha(n,\gamma)$ tale che per ogni $u \in DG_\gamma(\Omega)$ esista $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\overline{u} = u$ q.o. in Ω.*

Per motivare il teorema cominciamo dimostrando che le soluzioni di un'equazione ellittica a coefficienti limitati appartengono alla classe di De Giorgi.

Lemma 4.18. *Sia $A \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{n\times n})$ tale che valgano le* (4.1) *e* (4.3)*, e sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ una soluzione dell'equazione ellittica in forma debole associata ad A, i.e.*

$$\int_\Omega A[\nabla u, \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,. \tag{4.53}$$

Allora u soddisfa (4.51) *e* (4.52) *per $\gamma = (2\Lambda/\lambda)^2$.*

Dimostrazione. Sia $v = (u-t)_+$, allora $v \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ con $\nabla v = 1_{\{u>t\}}\nabla u$. Sia ψ una funzione cut-off fra $B_r(x)$ e $B_R(x)$, e testiamo l'equazione (4.53) con $\varphi = \psi^2(u-t)_+ = \psi^2 v$ (ciò è possibile tramite un ragionamento di approssimazione in quanto tale φ, appartenente a $W^{1,2}(\Omega)$, ha supporto compattamente contenuto in Ω). Poichè φ ha supporto in $E(t,R)$, troviamo allora

$$\int_{E(t,R)} A[\nabla u, \psi^2\nabla u] = -\int_{E(t,R)} A[\nabla u, 2\psi(u-t)\nabla\psi]\,.$$

Utilizzando l'ellitticità e la limitatezza di A, troviamo

$$\begin{aligned}\lambda \int_{E(t,R)} \psi^2|\nabla u|^2 &\le 2\Lambda \int_{E(t,R)} (u-t)\psi|\nabla u||\nabla\psi| \\ &\le 2\Lambda \left(\int_{E(t,R)} (u-t)^2|\nabla\psi|^2\right)^{1/2} \left(\int_{E(t,R)} \psi^2|\nabla u|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Poichè $0 \le \psi \le 1$, con $\psi = 1$ su $B_r(x)$ e $|\nabla\psi| \le C(R-r)^{-1}$, si conclude che

$$\int_{E(t,r)} |\nabla u|^2 \le \left(\frac{2\Lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{C}{(R-r)^2} \int_{E(t,R)} (u-t)^2\,,$$

cioè la tesi. □

4.3.2. *Oscillazione essenziale ed hölderianità.* Dati $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $r < d(x)$, denotiamo gli estremi superiore ed inferiore essenziale di u in $B_r(x)$ con

$$M(x,r) = \operatorname*{ess-sup}_{B_r(x)} u\,, \quad m(x,r) = \operatorname*{ess-inf}_{B_r(x)} u\,. \tag{4.54}$$

L'oscillazione essenziale di u in $B_r(x)$ sarà allora data da

$$\omega(x,r) = M(x,r) - m(x,r)\,. \tag{4.55}$$

In particolare se $x, y \in \Omega$ sono punti di Lebesgue di u abbiamo sempre

$$\begin{gathered}\sup_{r>0} m(x,r) \le u(x) \le \inf_{r>0} M(x,r)\,,\\ |u(x) - u(y)| \le \min\{\omega(x, 2|x-y|), \omega(y, 2|x-y|)\}\,. \end{gathered}\tag{4.56}$$

Passiamo ora a dimostrare due lemmi che saranno utilizzati in seguito.

Lemma 4.19 (Criterio di hölderianità I). *Se $\alpha \in (0,1)$, $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ ed esistono due costanti positive K ed R_0 tali che risulti $R_0 \le d(\Omega')$ e*

$$\omega(x,r) \le K\, r^\alpha\,, \tag{4.57}$$

per ogni $x \in \Omega'$ e $r < R_0$, allora esiste $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ tale che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω' e

$$[u]_{\alpha,\Omega'} \le 6\,K\,.$$

Dimostrazione. Per $\varepsilon < R_0$ consideriamo $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega')$ la ε-regolarizzata di u. Siano $x, y \in \Omega'$ punti di Lebesgue di u. In virtù di (4.56) abbiamo sempre

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \le \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)|u(x+z) - u(x)|dz \le 2\,K\varepsilon^\alpha\,.$$

Pertanto, se $|x-y| \ge \varepsilon$ allora

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \le |u(x) - u(y)| + 4\,K\varepsilon^\alpha \le 6\,K|x-y|^\alpha\,.$$

Se invece $|x-y| < \varepsilon$,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \le \int_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)|u(x+z) - u(y+z)|dz \le 2\,K|x-y|^\alpha\,.$$

Poichè u_ε è continua ne deduciamo che *per ogni $x, y \in \Omega'$*,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \le 6\,K|x-y|^\alpha\,.$$

Dunque le u_ε sono equi-Hölderiane. Sono anche equilimitate, risultando evidentemente $\sup_{\Omega'} |u_\varepsilon| \le \|u\|_{L^\infty(I_\varepsilon(\Omega'))}$. Dunque esistono $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ ed $\varepsilon_k \to 0^+$ tali che $u_{\varepsilon_k} \to \overline{u}$ uniformemente su Ω'. Poichè d'altra parte $u_{\varepsilon_k}(x) \to u(x)$ in ogni punto di Lebesgue di u, si è dimostrato che $u = \overline{u}$ q.o. in Ω'. □

Nella pratica, la verifica della condizione (4.57) viene effettuata tramite il seguente lemma.

Lemma 4.20 (Criterio di hölderianità II). *Se $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset\subset \Omega$ ed esistono due costanti positive η e R_0 tali che $\eta \in (0,1)$, $R_0 < 4\, d(\Omega')$ e*

$$\omega(x,r) \leq (1-\eta)\omega(x,4r)\,, \tag{4.58}$$

per ogni $x \in \Omega'$ e $< r \leq R_0$, allora esistono $\alpha = \alpha(\eta) \in (0,1)$ e $\overline{u} \in C^{0,\alpha}(\Omega')$ tali che $\overline{u} = u$ q.o. in Ω'. Inoltre,

$$[\overline{u}]_{\alpha,\Omega'} \leq C\,\frac{\|u\|_{L^\infty(I_{R_0}(\Omega'))}}{R_0^\alpha}\,,$$

dove C dipende solamente da η.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \Omega'$. La funzione $\omega(x,\cdot)$ è crescente per $r \in (0,R_0)$. Se dunque $r \in (R_0/4, R_0)$ e consideriamo un arbitrario $\alpha \in (0,1)$ troveremo che

$$\omega(x,r) \leq \omega(x,R_0) \leq 2\|u\|_{L^\infty(I_{R_0}(\Omega'))} \leq K\, r^\alpha\,,$$

a patto di porre

$$K = \frac{2\|u\|_{L^\infty(I_{R_0}(\Omega'))}}{(R_0/4)^\alpha}\,. \tag{4.59}$$

Sia ora $r \in (0, R_0/4]$, e consideriamo $k \in \mathbb{N}$ tale che risulti $4^k r \in (R_0/4, R_0)$. Per la (4.58) e applicando il ragionamento precedente a $4^k r$, troviamo che

$$\omega(x,r) \leq (1-\eta)^k \omega(x, 4^k r) \leq K\,(1-\eta)^k (4^k r)^\alpha\,.$$

Imponendo su α la condizione

$$(1-\eta)4^\alpha = 1\,, \quad \text{i.e.} \quad \alpha = \log_4\left(\frac{1}{1-\eta}\right)\,,$$

abbiamo dimostrato che

$$\omega(x,r) \leq K\, r^\alpha\,,$$

per ogni $r < R_0$. La tesi segue allora applicando il Lemma 4.19. □

4.3.3. *Locale limitatezza delle funzioni della classe di De Giorgi.* Il primo passo nella dimostrazione del Teorema 4.17 consiste nel dimostrare la locale limitatezza delle funzioni in $DG_\gamma(\Omega)$. Il risultato è basato sul seguente lemma che studia la situazione localmente:

Lemma 4.21. *Per ogni $\gamma > 0$, $n \geq 2$, esiste una costante $\theta \in (0,1)$ con la seguente proprietà. Sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che valga (4.51). Dati $x \in \Omega$, $r \in (0, d(x))$, sia $t \in \mathbb{R}$ tale che*

$$|E(t,r)| \leq \theta\, r^n\,. \tag{4.60}$$

Posto allora

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r^n\theta}\int_{E(t,r)} (u-t)^2}\,,$$

risulta

$$\left|E\left(t+c, \frac{r}{2}\right)\right| = 0\,,$$

i.e.

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{B_{r/2}(x)} u \leq t + c\,.$$

Il Lemma 4.21 ha come immediato corollario la limitatezza delle funzioni della classe di De Giorgi.

Corollario 4.22. *Se $u \in DG_\gamma(\Omega)$, $\gamma > 0$, allora $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, con*

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2}(x))} \leq 2\,\sqrt{\frac{1}{\theta r^n}\int_{B_r(x)} u^2}\,,$$

per la costante $\theta = \theta(n, \gamma)$ del Lemma 4.21. In particolare

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r/2}(x))} \leq C(n, \gamma)\|u\|_{L^2(B_r(x))}\,.$$

Dimostrazione del Corollario 4.22: Verifichiamo che, per ogni $x \in \Omega$ ed $r \in (0, d(x))$, esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che (4.60) è valida. Infatti

$$\int_{B_r(x)} u^2 \geq t^2|E(t,r)|\,,$$

da cui il più piccolo valore di t per cui (4.60) risulta valida è dato da

$$t = \sqrt{\frac{1}{r^n\theta}\int_{B_r(x)} u^2}\,.$$

Per il Lemma 4.21 troviamo allora

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{B_{r/2}(x)} u \leq t + c = \sqrt{\frac{1}{r^n\theta}\int_{B_r(x)} u^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\theta r^n}\int_{E(t,r)} (u-t)^2}\,.$$

Poichè

$$\sqrt{\int_{E(t,r)} (u-t)^2} \leq \sqrt{\int_{E(t,r)} u^2} + \sqrt{\int_{E(t,r)} t^2} \leq 2\sqrt{\int_{B_r(x)} u^2}\,,$$

concludiamo che

$$\operatorname*{ess\text{-}sup}_{B_{r/2}(x)} u \leq 2\,\sqrt{\frac{1}{r^n\theta}\int_{B_r(x)} u^2}\,.$$

Poichè $u \in DG_\gamma(\Omega)$ abbiamo $-u \in DG_\gamma(\Omega)$. Applicando allora il precedente ragionamento a $-u$ troviamo

$$\operatorname*{ess\text{-}inf}_{B_{r/2}(x)} u \geq -2\,\sqrt{\frac{1}{r^n\theta}\int_{B_r(x)} u^2}\,,$$

e concludiamo la dimostrazione. □

Dimostrazione del Lemma 4.21: Passo uno. Iniziamo dimostrando che, dati $x \in \Omega$, $0 < r < R < d(x)$, $-\infty < s < t < \infty$, allora

$$(t-s)^2|E(t,r)| \;\leq\; \frac{C}{(R-r)^2}\,|E(s,R)|^{2/n}\int_{E(s,R)} (u-s)^2\,, \tag{4.61}$$

$$\int_{E(t,r)} (u-t)^2 \quad \leq \quad \frac{C}{(R-r)^2} |E(s,R)|^{2/n} \int_{E(s,R)} (u-s)^2 \,, \tag{4.62}$$

per un'opportuna costante $C = C(n, \gamma)$.

Sia infatti ζ una funzione cut-off fra $B_r(x)$ e $B_{(R+r)/2}(x)$. Poichè $\zeta(u-s)_+ \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ con $\mathrm{spt}[\zeta(u-s)_+] \subset E(s,R)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} [\zeta(u-s)_+]^2 \quad &\leq \quad |E(s,R)|^{2/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} [\zeta(u-s)_+]^{2^\star} \right)^{2/2^\star} \\ &\leq \quad C|E(s,R)|^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\zeta(u-s)_+)|^2 \,, \end{aligned}$$

in virtù della disuguaglianza di Sobolev. Osserviamo adesso che

$$|\nabla(\zeta(u-s)_+)|^2 \leq 2\left(|\nabla\zeta|^2|(u-s)_+|^2 + 1_{\{u>s\}}\zeta^2|\nabla u|^2\right) .$$

Tenendo conto delle proprietà di ζ ed utilizzando (4.51) troviamo

$$\int |\nabla\zeta|^2|(u-s)_+|^2 \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{E(s,R)} (u-s)^2 \,,$$

$$\int_{\{u>s\}} \zeta^2|\nabla u|^2 \leq \int_{E(s,(r+R)/2)} |\nabla u|^2 \leq \frac{C}{(R-r)^2} \int_{E(s,R)} (u-s)^2 \,,$$

Consideriamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\zeta(u-s)_+]^2 \geq \int_{E(s,r)} (u-s)^2 \geq \int_{E(t,r)} (u-s)^2 \,;$$

poichè

$$\int_{E(t,r)} (u-s)^2 \geq \max\left\{(t-s)^2|E(t,r)|, \int_{E(t,r)} (u-t)^2\right\} ,$$

risulta dunque dimostrata la validità delle (4.61) e (4.62).

Passo due: Iteriamo le stime (4.61), (4.62) al fine di provare la tesi, e cioè che

$$|E(t+c, r/2)| = 0 \,.$$

Consideriamo infatti, per $0 < r < d(x)$ e per $t \in \mathbb{R}$ tale che valga (4.60), le successioni

$$r_h = \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\frac{1}{2^h} \,, \quad t_h = t + c - \frac{c}{2^h} \,.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} r_0 = r > r_h > r_{h+1} > r_\infty = \frac{r}{2} \,, \qquad & r_h - r_{h+1} = \frac{r}{2}\frac{1}{2^{h+1}} \,, \\ t_0 = t < t_h < t_{h+1} < t_\infty = t + c \,, \qquad & t_{h+1} - t_h = \frac{c}{2^{h+1}} \,. \end{aligned}$$

In virtù delle (4.61) e (4.62), le successioni

$$a_h = |E(t_h, r_h)| \,, \quad b_h = \int_{E(t_h,r_h)} (u-t_h)^2 \,,$$

soddisfano le disuguaglianze di decadimento,

$$a_{h+1} \leq \frac{C\,N^h}{(cr)^2} a_h^{2/n} b_h \,, \tag{4.63}$$

$$b_{h+1} \leq \frac{C\,N^h}{r^2} a_h^{2/n} b_h \,, \tag{4.64}$$

per un qualche opportuno $N \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che, se $\theta \in (0, 1)$ è sufficientemente piccolo, allora

$$a_h \leq \frac{\theta\, r^n}{M^h} \,, \quad b_h \leq \frac{\theta\, r^n\, (2c)^2}{M^h} \,, \tag{4.65}$$

per un qualche $M > 0$. Ragioniamo per induzione, tenendo presente che il caso $h = 0$ è verificato per ipotesi. Assumiamo dunque la validità di (4.65) per un certo $h \in \mathbb{N}$, e dimostriamo (4.65) per $h + 1$. Grazie alle (4.63) e (4.64) abbiamo infatti

$$\begin{aligned} a_{h+1} &\leq \frac{C\,N^h}{(cr)^2} a_h^{2/n} b_h \\ &\leq \frac{C\,N^h}{(cr)^2} \left(\frac{\theta\, r^n}{M^h}\right)^{2/n} \frac{\theta\, r^n\, (2c)^2}{M^h} \\ &= \left[4\,C\left(\frac{N}{M^{1+2/n}}\right)^h \theta^{2/n}\right] \theta\, r^n \,. \end{aligned}$$

Similmente si verifica che

$$b_{h+1} \leq \left[C\left(\frac{N}{M^{1+2/n}}\right)^h \theta^{2/n}\right] \theta\, r^n\, (2c)^2 \,.$$

Al fine di dimostrare le (4.65) rimane quindi da trovare i valori di M e θ per cui risulti

$$4\,C\left(\frac{N}{M^{1+2/n}}\right)^h \theta^{2/n} \leq \frac{1}{M^{h+1}} \,,$$

i.e.

$$\theta^{2/n} \leq \frac{1}{4\,CM}\left(\frac{M^{2/n}}{N}\right)^h \,, \quad \forall h \in \mathbb{N} \,.$$

Scegliendo dunque,

$$M = N^{n/2} \,, \quad \theta = \left(\frac{1}{4\,CN^{n/2}}\right)^{n/2} \,,$$

le (4.65) risultano verificate. Dalle (4.65) risulta immediatamente $a_\infty = 0$, i.e.

$$|E(t_\infty, r_\infty)| = \left|E\left(t + c, \frac{r}{2}\right)\right| = 0 \,,$$

che è la tesi. □

4.3.4. *Hölderianità delle funzioni della classe di De Giorgi.* Stabilita la locale limitatezza degli elementi di $DG_\gamma(\Omega)$, possiamo dimostrarne il carattere Höleriano riconducendoci ai criteri della Sezione 4.3.2. Siamo cioè nella posizione di concludere la dimostrazione del Teorema 4.17.

Dimostrazione del Teorema 4.17. Passo uno: Sia $u \in DG_\gamma(\Omega)$. Per il Corollario 4.22, $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. In virtù del Lemma 4.20 al fine di provare la tesi ci basterà verificare l'esistenza di una costante $\eta \in (0,1)$ per cui risulti

$$\omega(x,r) \le (1-\eta)\omega(x,4r)\,, \quad \forall x \in \Omega\,, 0 < r < \frac{d(x)}{4}\,, \tag{4.66}$$

dove ω è definita come nella sezione 4.3.2. Fissiamo dunque $x \in \Omega$, e denotiamo per brevità $\omega(r) = \omega(x,r)$, $M(r) = M(x,r)$ e $m(r) = m(x,r)$. Consideriamo la quota critica

$$t_0 = \frac{M(4r)+m(4r)}{2}\,,$$

e dimostriamo che

$$\text{se} \quad |E(t_0,2r)| \le \frac{|B_{2r}|}{2} \tag{4.67}$$

$$\Rightarrow M(r) \le M(4r) - \eta\,\omega(4r)\,; \tag{4.68}$$

$$\text{se} \quad |F(t_0,2r)| \le \frac{|B_{2r}|}{2} \tag{4.69}$$

$$\Rightarrow m(r) \ge m(4r) + \eta\,\omega(4r)\,. \tag{4.70}$$

Osservando che una fra le due condizioni (4.67) e (4.69) è sempre verificata e che entrambe le conclusioni (4.68), (4.70) implicano (4.66), avremo allora concluso la dimostrazione del teorema. Di più, possiamo supporre direttamente che valga (4.67) e dimostrare (4.68); il ragionamento utilizzato a tale fine potrà infatti essere riciclato nel caso complementare (4.69) applicandolo a $-u$.

Passo due: Rimane quindi da provare che (4.67) implica (4.68). A tal fine produciamo la seguente stima, valida ogni volta che $t_0 < s < t < M(4r)$:

$$(t-s)^2|E(t,2r)|^{2/n'} \le C(n,\gamma)|E(s,2r) \setminus E(t,2r)|r^{n-2}(M(4r)-s)^2\,. \tag{4.71}$$

Consideriamo infatti la funzione v definita da

$$v = (\min\{t,u\} - s)_+\,.$$

Allora $v \in W^{1,1}(B_{2r}(x))$, $v \ge 0$, con

$$|\{y \in B_{2r}(x) : v(y) = 0\}| = |F(s,2r)| \ge |F(t_0,2r)| = |B_{2r}| - |E(t_0,2r)| \ge \frac{|B_{2r}|}{2}\,.$$

Per il Teorema 3.9 abbiamo dunque

$$c(n)\left(\int_{E(s,2r)} (\min\{t,u\}-s)^{n'}\right)^{1/n'} \le \int_G |\nabla u|\,. \tag{4.72}$$

dove si è posto per brevità $G = E(s, 2r) \setminus E(t, 2r)$. Tenendo conto di (4.51) e del fatto che $G \subset E(s, 2r)$ troviamo facilmente

$$\begin{aligned}\left(\int_G |\nabla u|\right)^2 &\leq |G| \int_{E(s,2r)} |\nabla u|^2 \leq |G| \frac{\gamma}{(2r)^2} \int_{E(s,4r)} (u-s)^2 \\ &\leq |G| \frac{\gamma}{(2r)^2} |B_{4r}| (M(4r) - s)^2 \,.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\int_{E(s,2r)} (\min\{t, u\} - s)^{n'} \geq \int_{E(t,2r)} (\min\{t, u\} - s)^{n'} \geq (t-s)^{n'} |E(t, 2r)| \,.$$

Mettendo insieme le ultime due stime con (4.72) si perviene immediatamente alla stima (4.71).

Passo tre: Applichiamo ora la (4.71) alla successione di insiemi di livello

$$t_h = M(4r) - \frac{M(4r) - t_0}{2^h} = M(4r) - \frac{\omega(4r)}{2^{h+1}} \,,$$

che chiaramente soddisfa

$$\frac{M(4r) + m(4r)}{2} = t_0 < t_h < t_{h+1} < t_\infty = M(4r) \,.$$

Osservando allora che

$$t_{h+1} - t_h = \frac{\omega(4r)}{2^{h+2}} \,, \quad M(4R) - t_h = \frac{\omega(4r)}{2^{h+1}} \,,$$

e inserendo i valori $s = t_h$, $t = t_{h+1}$ nella (4.71) troviamo che, a patto di modificare il valore della costante $C(n, \gamma)$, risulterà

$$|E(t_{h+1}, 2r)|^{2/n'} \leq C(n, \gamma) r^{n-2} |E(t_h, 2r) \setminus E(t_{h+1}, 2r)| \,, \quad \forall h \geq 1 \,.$$

Per ogni numero naturale $N \in \mathbb{N}$ troviamo allora

$$\begin{aligned} C(n,\gamma) r^{n-2} |B_{2r}(x)| &\geq C(n,\gamma) r^{n-2} \sum_{h=0}^{\infty} |E(t_h, 2r) \setminus E(t_{h+1}, 2r)| \\ &\geq \sum_{h=0}^{N-1} |E(t_{h+1}, 2r)|^{2/n'} \geq N |E(t_N, 2r)|^{2/n'} \,,\end{aligned}$$

i.e., a patto di modificare $C(n, \gamma)$, tenendo conto che $|B_{2r}| = (2r)^n |B|$,

$$|E(t_N, 2r)| \leq \left(\frac{C(n,\gamma)}{N}\right)^{n'/2} (2r)^n \,.$$

Scegliamo $N \in \mathbb{N}$ come il più piccolo numero naturale tale che

$$\left(\frac{C(n,\gamma)}{N}\right)^{n'/2} \leq \theta \,, \tag{4.73}$$

dove $\theta = \theta(n, \gamma)$ è la costante trovata nel Lemma 4.21. Dunque $|E(t_N, 2r)| \leq \theta(2r)^n$ e, per il detto lemma, avremo

$$|E(t_N + c, r)| = 0\,, \quad \text{i.e.} \quad M(r) \leq t_N + c\,,$$

dove

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(2r)^n\theta}\int_{E(t_N,2r)}(u - t_N)^2}\,.$$

Rimane solamente da calcolare t_N e da stimare c. Come visto, risulta

$$t_N = M(4r) - \frac{\omega(4r)}{2^{N+1}}\,,$$

e considerando che $|E(t_N, 2r)| \leq \theta(2r)^n$ troviamo similmente che

$$c \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{(2r)^n\theta}|E(t_N, 2r)|(M(4r) - t_N)^2} \leq \frac{M(4r) - t_N}{2} = \frac{\omega(4r)}{2^{N+2}},.$$

Si è dunque provato che

$$M(r) \leq t_N + c \leq M(4r) - \frac{\omega(4r)}{2^{N+1}} + \frac{\omega(4r)}{2^{N+2}} = M(4r) - \frac{1}{2^{N+2}}\,\omega(4r)\,.$$

Si conclude la dimostrazione ponendo

$$\eta = \frac{1}{2^{N+2}}\,,$$

per N determinato nella (4.73) a partire da $\theta = \theta(n, \gamma)$. □

4.4. **Regolarità interna per minimi di funzionali uniformemente convessi.** Siamo dunque nella posizione di dimostrare il nostro principale risultato di regolarità.

Teorema 4.23. *Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione convessa con*

$$\nabla^2 f(\xi)[\tau, \tau] \geq \lambda|\tau|^2\,, \tag{4.74}$$

$$|\nabla^2 f(\xi)| \leq \Lambda\,, \tag{4.75}$$

per ogni $\xi, \tau \in \mathbb{R}^n$, e tale che $\nabla^2 f$ risulti localmente Lipschitziano su $\mathbb{R}^n$. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che risulti

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \int_\Omega f(\nabla u + \nabla\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)\,. \tag{4.76}$$

Allora esistono $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda) \in (0, 1)$ ed una funzione $\overline{u} \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ tali che $u = \overline{u}$ q.o. in Ω.

Osservazione 4.3. Le ipotesi (4.74) ed (4.75) implicano l'esistenza di costanti positive $c, C > 0$ tali che risulti

$$c|\xi|^2 - C \leq f(\xi) \leq C(1 + |\xi|^2)\,, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,. \tag{4.77}$$

In particolare data $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ e assumendo che Ω sia limitato, grazie al Teorema 2.29 possiamo sempre trovare una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che risulti $u - u_0 \in W^{1,2}_0(\Omega)$ e sia valida la (4.76). In particolare il Teorema 4.23 è non vuoto.

Dimostrazione del Teorema 4.23: Per il Teorema 2.32, la minimalità (4.76) di u implica la validità dell'equazione di Eulero-Lagrange (4.20). Grazie al Teorema 4.5 risulta $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ e inoltre, se $v_i = e_i \cdot (\nabla u)$ denota la derivata distribuzionale direzionale i-esima di u, $1 \leq i \leq n$, sappiamo che v_i risolve l'equazione ellittica associata al campo di matrici

$$A(x) = \nabla^2 f(\nabla u(x))\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{4.78}$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\,[\nabla v_i, \nabla\varphi] = 0\,, \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,. \tag{4.79}$$

Si noti infatti che grazie alle ipotesi fatte su f risulta $A \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$ e vale la (4.3). Il Teorema di De Giorgi assicura allora l'esistenza di funzioni $\overline{v}_i \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ tali che risulti $v_i = \overline{v_i}$ q.o. in Ω, per un qualche $\alpha = \alpha(n, \Lambda/\lambda) \in (0,1)$. In particolare, senza perdere di generalità, potremo supporre che risulti $\nabla u \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$. A partire dalla (4.78) vediamo allora che $A \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,+})$. Infatti dato $\Omega' \subset\subset \Omega$ risulta $M = \sup_{\Omega'} |\nabla u| < \infty$ e $\nabla^2 f \in \mathrm{Lip}(B_M; \mathbb{R}^{n\times n})$. Pertanto avremo

$$|A(x) - A(y)| \leq \mathrm{Lip}(\nabla^2 f, B_M)|\nabla u(x) - \nabla u(y)| \leq C(f, M, \Omega')|x-y|^\alpha\,,$$

per ogni $x, y \in \Omega'$. Possiamo dunque applicare il Teorema di Schauder a ciascuna v_i per verificare che $\nabla u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ e concludere la dimostrazione del teorema. □

Osservazione 4.4. Assumiamo adesso che risulti $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Poichè $u \in C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$ abbiamo in realtà $A = \nabla^2 f(\nabla u) \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Ripartiamo dunque dall'equazione ellittica omogenea

$$\int_\Omega A[\nabla v_i, \nabla\varphi] = 0\,, \qquad \forall\varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,,$$

per $v_i = e_i \cdot \nabla u$. Ripetendo il ragionamento del Teorema 4.4 basato sulla disuguaglianza di Caccioppoli e sul Teorema dei rapporti incrementali, e tenendo presente che adesso A è un campo di matrici di classe $C^{1,\alpha}_{loc}$, si dimostra che $v_i \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ per ogni $i = 1, ..., n$ e che, se $j = 1, ..., n$ e $v_{i,j} = e_j \cdot \nabla v_i$ allora $v_{i,j} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ risolve l'equazione ellittica a coefficienti hölderiani non-omogenea

$$\int_\Omega A[\nabla v_{i,j}, \nabla\varphi] = -\int_\Omega S_{i,j} \cdot \nabla\varphi\,, \qquad \forall\varphi \in C^\infty_c(\Omega)\,,$$

dove il campo vettoriale $S_{i,j}$ è dato da

$$S_{i,j} = (\nabla_j A)\nabla v_i\,.$$

In particolare $S_{i,j} \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Si ripete allora la dimostrazione del Teorema di Schauder. Infatti il termine non-omogeneo $S_{i,j}$ entrerà nelle stime di decadimento introducendo delle perturbazioni di ordine inferiore, che potranno essere riassorbite tramite i soliti lemmi di iterazione. Si perverrà dunque a dimostrare che $v_{i,j} \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ per ogni valore di i, j, i.e. che $u \in C^{3,\alpha}_{loc}(\Omega)$. Iterando questo argomento si dimostra dunque che $u \in C^\infty(\Omega)$.

Osservazione 4.5. A patto di lavorare su minimi u che siano Lipschitziani in Ω, l'ipotesi di uniforme convessità (4.74) su f nel Teorema 4.23 può essere rimpiazzata dall'ipotesi di locale uniforme convessità che abbiamo visto essere soddisfatta in particolare dall'integrando dell'area $f(\xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2}$. Poichè in questo caso $f \in C^\infty(\Omega)$, in virtù dell'osservazione precedente si dimostra in questo modo che i minimi del funzionale dell'area trovati nel Teorema 2.18 sono in realtà infinitamente derivabili.

5. ULTERIORI OSSERVAZIONI

5.1. **Funzioni Lipschitziane e Teorema di Rademacher.** In questa sezione presentiamo alcune notevoli proprietà aggiuntive delle funzioni Lipschitziane. Cominciamo col seguente lemma, che inverte il Lemma 2.9.

Lemma 5.1. *Se $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ allora esiste $\overline{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ e limitata su $\mathbb{R}^n$ tale che $u = \overline{u}$ q.o. su $\mathbb{R}^n$.*

Osservazione 5.1. E' facile adattare la dimostrazione che segue per dimostrare che se Ω è un aperto convesso e $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ allora u coincide q.o. con una funzione Lipschitziana su Ω. Senza un'ipotesi di questo tipo su Ω l'implicazione può essere falsa. Ad esempio se $\Omega = \{x \in B : x_n \neq 0\}$ allora posto $u(x) = \mathrm{sign}(x_n)$ abbiamo $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ma chiaramente $\mathrm{Lip}(u;\Omega) = \infty$. Non è difficile produrre un esempio simile con Ω semplicemente connesso.

Dimostrazione del Lemma 5.1: Sia u_ε l'ε-regolarizzata di u. Dalla (1.12), per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|u_\varepsilon(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))}, \quad |\nabla u_\varepsilon(x)| = |(\nabla u)_\varepsilon(x)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))}.$$

Applicando dunque il teorema fondamentale del calcolo a $s \mapsto u_\varepsilon(x + s(y-x)|y-x|^{-1})$, troviamo

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

In particolare $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ è una famiglia equicontinua ed equilimitata in $C^0(\mathbb{R}^n)$. Per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà, esiste una funzione $\overline{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ed esiste $\varepsilon_h \to 0$ tale che, posto per brevità $u_h = u_{\varepsilon_h}$, risulti $u_h \to \overline{u}$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Poichè $u_h(x) \to u(x)$ per ogni x punto di Lebesgue della u, troviamo che $\overline{u} = u$ q.o. su $\mathbb{R}^n$. □

Dimostriamo ora che se u è una funzione Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ e se $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di Lebesgue del gradiente distribuzionale ∇u di u, allora u è differenziabile in senso classico in x, con differenziale definito proprio da $\nabla u(x)$.

Teorema 5.2 (Teorema di Rademacher)**.** *Se $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ e se $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di Lebesgue di ∇u, allora u è differenziabile in x, con $d_x u(\tau) = \nabla u(x) \cdot \tau$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $x \in \mathbb{R}^n$ è tale che

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |\nabla u(z) - \nabla u(x)| dz = 0. \tag{5.2}$$

Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo uno: Per $r \neq 0$ definiamo $v_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo

$$v_r(y) = \frac{u(x+ry) - u(x)}{r}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

e raccogliamo alcune osservazioni su queste funzioni. Per ogni $r \neq 0$, la funzione v_r risulta Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$ con $\mathrm{Lip}(v_r) \leq \mathrm{Lip}(u)$ e con $v_r(0) = 0$. In particolare $\{v_r\}_{r \neq 0}$ è una famiglia di funzioni localmente equi-limitate ed equi-Lipschitziane su $\mathbb{R}^n$. Sia poi ∇v_r il gradiente debole di v_r su $\mathbb{R}^n$. Allora per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$\nabla v_r(y) = \nabla u(x + ry)\,. \tag{5.3}$$

Sia infatti $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tenendo conto del fatto che $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\nabla\varphi(y)dy = 0$ e posto $\psi(z) = \varphi(r^{-1}(z-x))$ per $z \in \mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} v_r(y)\nabla\varphi(y)dy &= \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} u(x+ry)\nabla\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\frac{\nabla\varphi(r^{-1}(z-x))}{r}\,\frac{dz}{r^n} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(z)\nabla\psi(z)\,\frac{dz}{r^n} = -\int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)\nabla u(z)\,\frac{dz}{r^n} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\nabla u(x + r\,y)\,dy\,,\end{aligned}$$

che è la (5.3). Cambiando variabili in (5.2) troviamo similmente che per ogni $R > 0$ risulta

$$\lim_{r\to 0}\int_{B_R} |\nabla v_r(y) - \nabla u(x)|dy = 0\,, \tag{5.4}$$

cioè $\nabla v_r \to \nabla u(x)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per $r \to 0$.

Passo due: Usiamo le informazione del passo uno per concludere la dimostrazione. Per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà, data una successione $r_h \to 0$ esistono $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $h(k) \to \infty$ tali che, posto con abuso di notazione $v_k = v_{r_{h(k)}}$, si abbia $v_k \to v$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$. In particolare $v(0) = 0$ e v è Lipschitziana su $\mathbb{R}^n$. Dalla (5.4) troviamo facilmente che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_B v\nabla\varphi = \lim_{h\to\infty}\int_B v_h\nabla\varphi = -\lim_{h\to\infty}\int_B \varphi\nabla v_h = -\int_B \varphi(y)\nabla u(x)dy\,,$$

cioè il gradiente debole di v su $\mathbb{R}^n$ è costante e soddisfa

$$\nabla v(y) = \nabla u(x)\,,$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$. Dal Lemma 2.6 (applicato alla funzione $w(y) = v(y) - \nabla u(x)\cdot y$, $y \in \mathbb{R}^n$) troviamo allora che

$$v(y) = c + \nabla u(x)\cdot y\,,$$

per q.o. $y \in \mathbb{R}^n$. La condizione $v(0) = 0$ implica $c = 0$. Quindi $v_k \to v$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$, con $v(y) = \nabla u(x)\cdot y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$. Poichè v è indipendente dalla successione r_h scelta in partenza si è dunque provato che se $r \to 0$ allora $v_r \to v$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\lim_{r\to 0}\sup_{y\in K}\left|\frac{u(x+ry)-u(x)}{r} - \nabla u(x)\cdot y\right| = 0\,,$$

per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$. Dunque u è differenziabile in x e il suo differenziale coincide col funzionale lineare definito da $\nabla u(x)$. $\square$

5.2. **Integrandi dipendenti da variabili di ordine inferiore.** Possiamo ottenere risultati di esistenza di minimi per problemi più generali di quello considerato nel Teorema 2.29. Nel seguente teorema perturbiamo il funzionale $\int_\Omega f(\nabla u)$ con termini di ordine inferiore a crescita controllata.

Teorema 5.3. *Siano p, f ed Ω come nel Teorema 2.29. Sia $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

(i) *$g(\cdot, s)$ è misurabile su Ω per ogni $s \in \mathbb{R}$; $g(x, \cdot)$ è continua per q.o. $x \in \Omega$;*
(ii) *esistono $a \in L^1(\Omega)$, $\varepsilon \in (0, p-1)$ e $b \in L^{p/\varepsilon}(\Omega)$ tali che*

$$g(x,s) \geq -a(x) - b(x)|s|^{p-\varepsilon}\,, \tag{5.5}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Se $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ soddisfa

$$\int_\Omega f(\nabla u_0(x)) + g(x, u_0(x))\,dx < \infty\,,$$

allora esiste un minimo per il problema variazionale

$$\inf\left\{\int_\Omega f(\nabla u(x)) + g(x, u(x))\,dx : u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}. \tag{5.6}$$

Dimostrazione: Denotando con m il valore dell'estremo inferiore in (5.6), osserviamo che l'ipotesi fatta su u_0 assicura $m < \infty$. Sia dunque $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset (u_0 + W_0^{1,p}(\Omega))$ una successione minimizzante per (5.6), cosicchè

$$m = \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h) + g(x, u_h)\,.$$

Tenendo in considerazione (2.70) e (5.5) troviamo quindi che

$$(m + \|a\|_{L^1(\Omega)} + C|\Omega|) \geq \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega c|\nabla u_h|^p - b\,|u_h|^{p-\varepsilon}\,.$$

Osserviamo ora che

$$b\,|u_h|^{p-\varepsilon} \leq 2^{p-1}\left(b\,|u_0|^{p-\varepsilon} + b\,|u_h - u_0|^{p-\varepsilon}\right)\,.$$

Da una parte grazie alla disuguaglianza di Hölder troviamo

$$\int_\Omega b\,|u_0|^{p-\varepsilon} \leq \|b\|_{L^{p/\varepsilon}(\Omega)}\|u_0\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

D'altra parte grazie alla disuguaglianza di Young troviamo che per ogni $\delta > 0$

$$\int_\Omega b\,|u - u_0|^{p-\varepsilon} \leq C(p,\delta)\int_\Omega b^{p/\varepsilon} + \delta\int_\Omega |u - u_0|^p\,,$$

(dove $C(p,\delta) \to \infty$ se $\delta \to 0^+$). Per la disuguaglianza di Faber-Krahn,

$$\int_\Omega |u - u_0|^p \leq C(n,p)|\Omega|^{p/n}\int_\Omega |\nabla(u_h - u_0)|^p \leq C(n,p)|\Omega|^{p/n}\left(\int_\Omega |\nabla u_h|^p + |\nabla u_0|^p\right),$$

dunque mettendo tutto insieme

$$K \geq (c - \delta\, C(n,p)|\Omega|^{p/n}) \limsup_{h\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_h|^p \,,$$

dove la costante K dipende da n, p, ε, M, $\|a\|_{L^1(\Omega)}$, $|\Omega|$, $\|b\|_{L^{p/\varepsilon}(\Omega)}$, $\|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ e δ, ma non dalla successione u_h. Scegliendo opportunamente δ si trova dunque che la successione $\{\nabla u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 2.30 si trova allora che, a meno di estrarre sottosuccessioni, $u_h \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ dove $u \in (u_0 + W^{1,p}(\Omega))$. La minimalità di u risulterà dunque provata a partire dalla relazione di semicontinuità inferiore

$$\liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_h) + g(x,u_h) \geq \int_\Omega f(\nabla u) + g(x,u)\,.$$

In virtù del Teorema 2.7 ci basta verificare che

$$\liminf_{h\to\infty} \int_\Omega g(x,u_h) \geq \int_\Omega g(x,u)\,.$$

Poichè dalla (5.5) e dal Lemma di Fatou segue

$$\liminf_{h\to\infty} \int_\Omega g(x,u_h) + a + b\,|u_h|^{p-\varepsilon} \geq \int_\Omega g(x,u) + a + b\,|u|^{p-\varepsilon}\,,$$

è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega b\,|u_h|^{p-\varepsilon} = \int_\Omega b\,|u|^{p-\varepsilon}\,. \tag{5.7}$$

In effetti, posto $v_h = \max\{u_h, u\}$ e $q = p - \varepsilon$, applicando due volte la disuguaglianza di Hölder (prima con gli esponenti coniugati p/ε e $p/(p-\varepsilon)$, quindi con q e q')

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega b\,|u_h|^q - b\,|u|^q\right| &\leq \int_\Omega |b|\big||u_h|^q - |u|^q\big| \leq \int_\Omega q|b||v_h|^{q-1}|u_h - u| \\
&\leq p\|b\|_{L^{p/\varepsilon}(\Omega)} \left(\int_\Omega |v_h|^{[(q-1)p]/(p-\varepsilon)}|u_h - u|^{p/(p-\varepsilon)}\right)^{1-(\varepsilon/p)} \\
&\leq p\|b\|_{L^{p/\varepsilon}(\Omega)} \left(\left(\int_\Omega |v_h|^p\right)^{1/q'} \left(\int_\Omega |u_h - u|^p\right)^{1/q}\right)^{1-(\varepsilon/p)}.
\end{aligned}$$

Poichè $\max\{|s|,|t|\} \leq |s| + |t|$ troviamo subito che $\|v_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C\max\{\|u_h\|_{L^p(\Omega)}, \|u\|_{L^p(\Omega)}\}$. Poichè $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$ la (5.7) è dunque dimostrata. □

Osservazione 5.2. Nel Teorema 5.3 si permette a g di assumere valori negativi. Per ottenere un risultato di esistenza in questa situazione è necessario richiedere l'ipotesi di crescita controllata dal basso (5.5), al fine di evitare che il funzionale minimizzato possa assumere valori infinitamente negativi. L'ipotesi fatta, cioè che $-g(x,s)$ tenda a $+\infty$ al più come $|s|^q$ per un qualche $q < p$ è in un certo senso la migliore possibile se vogliamo ottenere un teorema così generale. Consideriamo ad esempio il caso in cui $-g(x,s)$ si comporti come $|s|^p$. In tal caso la funzione b deve soddisfarre una qualche limitazione puntuale *dipendente dai dati del problema*. A titolo di esempio consideriamo il caso in cui b risulti costante e formuliamo il problema variazionale

$$m(b) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p - b|u|^p : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} , \tag{5.8}$$

che coincide col problema (5.6) per $u_0 = 0$, $g(x,s) = b\,|s|^p$, $b \in \mathbb{R}$. Posto $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p - b|u|^p$ risulta allora

$$F(u) = \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p - \lambda_p(\Omega)|u|^p \right\} + (\lambda_p(\Omega) - b) \int_\Omega |u|^p .$$

Sia ora v un'autofunzione del p-Laplaciano in Ω (i.e., $\int_\Omega |v|^p = 1$ e $\int_\Omega |\nabla v|^p = \lambda_p(\Omega)$, si veda l'osservazione 2.26). Il termine fra parentesi graffe è sempre non negativo per definizione di $\lambda_p(\Omega)$, e si annulla se e solo $u = t\,v$ per un qualche $t \in \mathbb{R}$. Se dunque $b < \lambda_p(\Omega)$ allora $F \geq 0$ su $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $F(u) = 0$ se e solo se $u = 0$: in particolare $m(b) = 0$ e $u = 0$ è l'unico minimo del problema, che dunque è banale. Se $b > \lambda_p(\Omega)$ allora

$$F(t\,v) = -t^p(b - \lambda_p(\Omega)) \to -\infty$$

per $t \to +\infty$, e in particolare $m(b) = -\infty$ e non esistono minimi. Infine se $b = \lambda_p(\Omega)$ abbiamo $F \geq 0$ su $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $F(u) = 0$ se e solo se $u = t\,v$ per un qualche $t \in \mathbb{R}$.

I minimi trovati nel Teorema 5.3 soddisfano un'opportuna forma dell'equazione di Eulero-Lagrange.

Teorema 5.4. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe $C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che per un qualche $p \in (1, \infty)$ e $C > 0$ risulti*

$$|\nabla f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}) .$$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $g : \Omega \times \mathbb{R}$ tale che $g(\cdot, s)$ sia misurabile in Ω per ogni $s \in \mathbb{R}$ e $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ e

$$\left| g(x,s) - g(x,t) \right| \leq C(1 + |s|^{q-1} + |t|^{q-1})|s - t| , \tag{5.9}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, dove q soddifa le condizioni (2.67)*. Sia infine $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che risulti*

$$\int_\Omega f(\nabla u) + g(x,u) \leq \int_\Omega f(\nabla u + \nabla \varphi) + g(x, u + \varphi) , \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) . \tag{5.10}$$

Allora vale l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\int_\Omega \nabla f(\nabla u) \cdot \nabla \varphi = - \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial s}(x,u)\varphi , \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) . \tag{5.11}$$

In particolare, se $u \in C^2(\Omega)$ e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ allora

$$\operatorname{div}(\nabla f(\nabla u)) = \frac{\partial g}{\partial s}(x,u) \qquad su\ \Omega.$$

Dimostrazione: Data $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si considera la funzione $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Phi(t) = \int_\Omega f(\nabla u + t\,\nabla\varphi) + g(x, u + t\varphi)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Per ipotesi Φ ha un minimo in $t = 0$. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.32 si dimostra dunque che Φ è derivabile in $t = 0$, con

$$\Phi'(0) = \int_\Omega \nabla f(\nabla u) \cdot \nabla\varphi + \frac{\partial g}{\partial s}(x, u)\,\varphi\,.$$

□

Osservazione 5.3. Si osservi come nel caso presente l'equazione di Eulero-Lagrange (5.11) non sia più sufficiente a caratterizzare i minimi (infatti le funzioni Φ costruite nella dimostrazione non risultano in generale convesse su $\mathbb{R}$). Effettivamente, in questa situazione, si possono trovare soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange che non risultano essere minimi. Tale funzioni si dicono generalmente *stazionarie* per il funzionale associato all'equazione (5.11).

Esempio 5.1. Per il Teorema 5.4, l'equazione di Poisson $-\Delta u(x) = g(x)$ è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale $\int_\Omega (1/2)|\nabla u|^2 - g(x)u$.

Esempio 5.2. Per il Teorema 5.4 i minimi del problema (5.8) con $b = \lambda_p(\Omega)$ soddisfano l'equazione di Eulero-Lagrange

$$-\Delta_p u = \lambda_p(\Omega)|u|^{p-2}u \qquad \text{su } \Omega.$$

Si motiva così la scelta di chiamare $\lambda_p(\Omega)$ primo autovalore del p-Laplaciano.

Prerequisiti

Si assume che lo studente abbia familiarità coi seguenti risultati di analisi matematica, usualmente trattati nei corsi del biennio e/o nei corsi istituzionali di analisi. Si indicano dei riferimenti bibliografici per alcuni di questi risultati. Con $|E|$ indichiamo la misura di Lebesgue dell'insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, mentre $\mathcal{H}^{n-1}$ denota la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Formula del cambiamento di variabili: Sia $T \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ iniettiva con ∇T limitato in $\mathbb{R}^n$. Definito il Jacobiano di T come

$$JT(x) = |\det \nabla T(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,$$

per ogni Boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$ risulta

$$|T(E)| = \int_E JT(x)dx\,.$$

Per una dimostrazione si veda [10, Capitolo 9].

Teorema della divergenza/Teorema di Gauss-Green: Dato un campo vettoriale $T \in C^1_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, oppure una funzione $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, combinando il teorema fondamentale del calcolo e il teorema di Fubini troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\ T(x)dx = 0\,, \tag{5.12}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\varphi(x)dx = 0\,. \tag{5.13}$$

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ con bordo di classe C^1 e se ν_Ω è la normale esterna ad Ω, allora si dimostra che

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, T(x)dx = \int_{\partial\Omega} (T(x)\cdot\nu_\Omega(x))\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,, \tag{5.14}$$

$$\int_\Omega \nabla\varphi(x)dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,\nu_\Omega(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\,. \tag{5.15}$$

Per una dimostrazione si veda [10, Capitolo 10].

Teorema di Ascoli-Arzelà: Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ ed una successione $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ di funzioni equicontinue ed equilimitate su E, esiste una funzione u continua su E ed una sottosuccessione $u_{h(k)}$ convergente uniformemente ad u sui compatti di E. Si veda ancora [10, Capitolo 1].

Densità delle funzioni continue negli spazi L^p: Se E è misurabile secondo Lebesgue, $\delta > 0$ ed $u \in L^p(E)$ $(1 \le p < \infty)$, allora

$$\|v - u\|_{L^p(E)} \le \delta\,,$$

per una qualche $v \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$.

Convergenza debole in $L^p(E)$: Dato p tale che $1 \le p \le \infty$ definiamo p' ponendo

$$p' = \begin{cases} 1\,, & \text{se } p = \infty, \\ p/(p-1)\,, & \text{se } 1 < p < \infty, \\ +\infty\,, & \text{se } p = 1\,. \end{cases}$$

Sia E un Boreliano di $\mathbb{R}^n$ e siano $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset L^p(E)$, $u \in L^p(E)$. Se $1 \le p < \infty$ diciamo che $u_h \rightharpoonup u$ in $L^p(E)$ se

$$\lim_{h\to\infty} \int_E u_h\, v = \int_E u\, v\,,$$

per ogni $v \in L^{p'}(E)$. Nel caso $p = \infty$ diciamo che $u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ in $L^\infty(E)$ se

$$\lim_{h\to\infty} \int_E u_h\, v = \int_E u\, v\,,$$

per ogni $v \in L^1(E)$. In entrambi i casi si ha sempre

$$\|u\|_{L^p(E)} \le \liminf_{h\to\infty} \|u_h\|_{L^p(E)}\,,$$

e necessariamente $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^p(E)$. Viceversa, se $\{u_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $L^p(E)$ per $1 < p \le \infty$, allora esistono $u \in L^p(E)$ ed $h(k) \to \infty$ per $k \to \infty$ tali che

$$u_{h(k)} \rightharpoonup u \text{ in } L^p(E) \text{ (se } 1 < p < \infty)\,,$$
$$u_{h(k)} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ in } L^\infty(E) \text{ (se } p = \infty)\,.$$

Questo fondamentale teorema di compattezza si basa essenzialmente sul seguente Teorema di Riesz. Se $1 \le p < \infty$ e $L : L^p(E) \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare e limitato, i.e.

$$\|L\| = \sup\{L(u) : u \in L^p(E)\,, \|u\|_{L^p(E)} \le 1\} < \infty\,,$$

allora esiste $v \in L^{p'}(E)$ tale che $\|L\| = \|v\|_{L^{p'}(E)}$ e

$$L(u) = \int_E u\, v\,, \qquad \forall u \in L^p(E)\,.$$

Per tutti questi risultati si veda [2, IV.3].

Criterio di compattezza in spazi metrici. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Allora $Y \subset X$ è pre-compatto (cioè, la chiusura di Y è un compatto in X) se e solo se per ogni $\delta > 0$ esiste $Z_\delta \subset X$ pre-compatto tale che per ogni $y \in Y$ esista $z \in Z_\delta$ con $d(y, z) < \delta$ (il criterio si dimostra facilmente costruendo opportune successioni diagonali).

Notazione

Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $C^0(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su Ω e con $C^0(\overline{\Omega})$ lo spazio vettoriale delle funzioni uniformemente continue su Ω. Si noti come ogni $u \in C^0(\overline{\Omega})$ si estenda univocamente per continuità su $\partial\Omega$. Denotiamo con $C^0_c(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue a supporto compatto in Ω. Ovviamente $C^0_c(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega}) \subset C^0(\Omega)$. Dato $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, denotiamo con $C^k(\Omega)$ - rispettivamente: con $C^k(\overline{\Omega})$ - lo spazio vettoriale delle funzioni derivabili fino all'ordine k, con derivate continue - rispettivamente: uniformemente continue. Introduciamo in modo ovvio lo spazio $C^k_c(\Omega)$, poniamo

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)\,,$$

e similmente definiamo $C^\infty(\overline{\Omega})$ e $C^\infty_c(\Omega)$. Dato $\alpha \in (0,1]$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ denotiamo con

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup\left\{\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in \Omega\,, x \neq y\right\}\,,$$

la costante di Hölder di esponente α di u in Ω. Se $[u]_{\alpha,\Omega} < \infty$ allora u soddisfa una disuguglianza di continuità uniforme in Ω

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_{\alpha,\Omega}|x - y|^\alpha\,, \qquad \forall x, y \in \Omega\,,$$

e si dice che u è α-Hölderiana in Ω. Denotiamo con $C^{0,\alpha}(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni α-Hölderiane in Ω e, dato $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, denotiamo con $C^{k,\alpha}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni derivabili fino all'ordine k con derivate α-Hölderiane in Ω. Si osservi che

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Definiamo in modo ovvio gli spazi $C^{k,\alpha}_c(\Omega)$ e poniamo infine

$$C^{k,\alpha}_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \in C^{k,\alpha}(\Omega'), \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}\,.$$

References

[1] Ambrosio L., Fusco N., Pallara, D., Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[2] Brezis H., Analisi Funzionale, teoria ed applicazioni. Liguori Editore.

[3] Buttazzo G., Giaquinta M., Hildebrandt S., One dimensional variational problems, Oxford Science Publications, 1998.

[4] Dacorogna B., Introduction to the calculus of variations. Translated from the 1992 French original. Second edition. Imperial College Press, London, 2009. xiv+285 pp.

[5] Dacorogna B., Direct methods in the calculus of variations. Second edition. Applied Mathematical Sciences, 78. Springer, New York, 2008. xii+619 pp.

[6] De Giorgi E., Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. Annali Mat. Pura e Appli Ser. 4, vol 36, (1954), 191-213.

[7] De Giorgi E., Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. (Italian) Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3, (1957), 25–43.

[8] Ekeland I., Temam R., Convex analysis and variational problems. Translated from the French. Corrected reprint of the 1976 English edition. Classics in Applied Mathematics, 28. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999. xiv+402 pp.

[9] Evans L. C., Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. xviii+662.

[10] Fusco N., Marcellini P., Sbordone C., Analisi Matematica due, Liguori Editore.

[11] Giaquinta M., Martinazzi L., An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)], 2. Edizioni della Normale, Pisa, 2005.

[12] Giusti E., Metodi diretti nel calcolo delle variazioni. Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[13] Giusti E., Minimal surfaces and functions of bounded variation. Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. xii+240 pp.

[14] Serrin J., On the definition and properties of certain variational integrals. Trans. Amer. Math. Soc. 101 1961 139–167.