Interpolación y teoría de operadores

Alvaro Arias

Universidad de Denver

8 de Junio de 2015

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in D$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in D$.
Encontrar condiciones para $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in D$.
Encontrar condiciones para $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica (i.e., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$)

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in D$.
Encontrar condiciones para $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica (i.e., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$)
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in D$.
Encontrar condiciones para $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica (i.e., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$)
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$.
- Para todo $z \in D$, $|f(z)| \leq 1$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick (1916, 1919)

Notación: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in D$.
Encontrar condiciones para $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica (i.e., $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < 1$)
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$.
- Para todo $z \in D$, $|f(z)| \leq 1$.

La solución existe si y solo si la matriz de $n \times n$

$$\left(\frac{1 - \overline{\mu_j}\mu_i}{1 - \overline{\lambda_j}\lambda_i} \right)_{i,j \leq n} \geq 0$$

es semidefinida positiva.

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Encontrar condiciones para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Encontrar condiciones para que exista $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Encontrar condiciones para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica
- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Encontrar condiciones para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica
- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- Para todo $z \in D$, $|f(z)| \leq 1$.

Teorema de interpolación de Caratheodory (1911)

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Encontrar condiciones para que exista $f : D \to \mathbb{C}$ con las siguientes condiciones:

- f es analítica
- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- Para todo $z \in D$, $|f(z)| \leq 1$.

La solución existe si y solo si la matriz de $n \times n$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

tiene norma (como operador) menor o igual a 1.

Sea $A \in M_{n\times n}$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Sea $A \in M_{n\times n}$

$A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

Sea $A \in M_{n \times n}$

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\ \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}.$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Sea $A \in M_{n\times n}$

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$.

$A : \ell_2^n \to \ell_2^n$

$$\|A\| = \sup_{\|z\|_2 = 1} \|Az\|_2$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Sea $A \in M_{n\times n}$

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\ \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}.$

$A : \ell_2^n \to \ell_2^n$

$$\|A\| = \sup_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2$$

En general, usamos ℓ_2, el espacio de sucesiones $z = (z_1, z_2, \ldots)$ que satisfacen $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |z_i|^2} < \infty$.

Sea $A \in M_{n\times n}$

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\ \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}.$

$A : \ell_2^n \to \ell_2^n$

$$\|A\| = \sup_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2$$

En general, usamos ℓ_2, el espacio de sucesiones $z = (z_1, z_2, \ldots)$ que satisfacen $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |z_i|^2} < \infty$. Note que ℓ_2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^\infty z_i \overline{w_i}.$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Sea $A \in M_{n\times n}$

$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)\,,\ \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}.$
$A : \ell_2^n \to \ell_2^n$

$$\|A\| = \sup_{\|z\|_2=1} \|Az\|_2$$

En general, usamos ℓ_2, el espacio de sucesiones $z = (z_1, z_2, \ldots)$ que satisfacen $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |z_i|^2} < \infty$. Note que ℓ_2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^\infty z_i \overline{w_i}.$$

La función lineal $T : \ell_2 \to \ell_2$ es continua si y solo si es acotada:

$$\|T\| = \sup_{\|z\|_2=1} \|T(z)\|_2$$

Si $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es continua, el operador adjunto $T^* : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ esta definido por

$$\left\langle T^*(z), w \right\rangle = \left\langle z, T(w) \right\rangle \text{ para todo } z, w \in \ell_2.$$

Si $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ es continua, el operador adjunto $T^* : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ esta definido por

$$\left\langle T^* \left(z\right), w\right\rangle = \left\langle z, T\left(w\right)\right\rangle \text{ para todo } z, w \in \ell_2.$$

T^* es continuo y $\left\| T \right\| = \left\| T^* \right\|$.

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Si $T : \ell_2 \to \ell_2$ es continua, el operador adjunto $T^* : \ell_2 \to \ell_2$ esta definido por

$$\left\langle T^*\left(z\right), w\right\rangle = \left\langle z, T\left(w\right)\right\rangle \text{ para todo } z, w \in \ell_2.$$

T^* es continuo y $\|T\| = \|T^*\|$.
Si $A \in M_{n\times n}$, la matriz adjunta A^* es la matriz conjugada y transpuesta de A.

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

Si $T : \ell_2 \to \ell_2$ es continua, el operador adjunto $T^* : \ell_2 \to \ell_2$ esta definido por

$$\langle T^*(z), w\rangle = \langle z, T(w)\rangle \text{ para todo } z, w \in \ell_2.$$

T^* es continuo y $\|T\| = \|T^*\|$.
Si $A \in M_{n\times n}$, la matriz adjunta A^* es la matriz conjugada y transpuesta de A.

Definition

La matriz $A \in M_{n\times n}$ es semidefinida positiva ($A \geq 0$) si $A = A^*$ y si para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\langle Az, z\rangle \geq 0$.

Si $T : \ell_2 \to \ell_2$ es continua, el operador adjunto $T^* : \ell_2 \to \ell_2$ esta definido por

$$\langle T^*(z), w\rangle = \langle z, T(w)\rangle \text{ para todo } z, w \in \ell_2.$$

T^* es continuo y $\|T\| = \|T^*\|$.
Si $A \in M_{n\times n}$, la matriz adjunta A^* es la matriz conjugada y transpuesta de A.

Definition

La matriz $A \in M_{n\times n}$ es semidefinida positiva $(A \geq 0)$ si $A = A^*$ y si para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\langle Az, z\rangle \geq 0$.

Definition

Si $A, B \in M_{n\times n}$, $A \geq B$ si y solo si $A - B \geq 0$.

La norma de A puede expresarse en terminos de esta relacion:

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\langle Az, Az \rangle \quad \leq \quad \langle z, z \rangle$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{aligned} \langle Az, Az \rangle &\leq \langle z, z \rangle \\ \langle A^* Az, z \rangle &\leq \langle z, z \rangle \end{aligned}$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{aligned} \langle Az, Az\rangle &\leq \langle z, z\rangle \\ \langle A^* Az, z\rangle &\leq \langle z, z\rangle \\ 0 &\leq \langle (I - A^* A)z, z\rangle \end{aligned}$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{aligned} \langle Az, Az \rangle &\leq \langle z, z \rangle \\ \langle A^* Az, z \rangle &\leq \langle z, z \rangle \\ 0 &\leq \langle (I - A^* A) z, z \rangle \\ (I - A^* A) &\geq 0. \end{aligned}$$

Matrices, operadores, normas, y operadores adjuntos

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{aligned} \langle Az, Az \rangle &\leq \langle z, z \rangle \\ \langle A^* Az, z \rangle &\leq \langle z, z \rangle \\ 0 &\leq \langle (I - A^* A)z, z \rangle \\ (I - A^* A) &\geq 0. \end{aligned}$$

En general,

$$\|A\| \leq C \Leftrightarrow \left(C^2 I - A^* A\right) \geq 0$$

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{array}{rcl} \langle Az, Az\rangle & \leq & \langle z, z\rangle \\ \langle A^*Az, z\rangle & \leq & \langle z, z\rangle \\ 0 & \leq & \langle (I - A^*A)z, z\rangle \\ (I - A^*A) & \geq & 0. \end{array}$$

En general,

$$\|A\| \leq C \Leftrightarrow \left(C^2 I - A^*A\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(C^2 I - AA^*\right) \geq 0$$

$\|A\| \leq 1$ si y solo si, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, $\|A(z)\|^2 \leq \|z\|^2$

$$\begin{array}{rcl} \langle Az, Az\rangle & \leq & \langle z, z\rangle \\ \langle A^* Az, z\rangle & \leq & \langle z, z\rangle \\ 0 & \leq & \langle (I - A^*A)z, z\rangle \\ (I - A^*A) & \geq & 0. \end{array}$$

En general,

$$\|A\| \leq C \Leftrightarrow \left(C^2 I - A^* A\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(C^2 I - AA^*\right) \geq 0$$

La solucion de los problemas de interpolación de Nevanlinna-Pick y de Caratheodory se reduce a calcular la norma de una matriz.

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^{\infty} = \left\{ f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z \in D} \left| f(z) \right| < \infty \right\}.$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^{\infty} = \{ f : D \to \mathbb{C} : \; f \text{ es analítica y } \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty \}$.

- H^{∞} es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^{\infty}} = \sup_{z \in D} |f(z)|$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \; f \text{ es analítica y } \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^{\infty} = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty\}.$

- H^{∞} es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^{\infty}} = \sup_{z \in D} |f(z)|$
- H^{∞} es un algebra, y como $\|fg\|_{H^{\infty}} \leq \|f\|_{H^{\infty}} \|g\|_{H^{\infty}}$, H^{∞} es un algebra de Banach.

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f$ es analítica y $\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

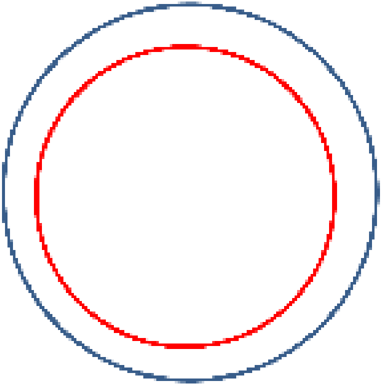
H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.



Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \; f$ es analítica y $\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \; f$ es analítica y $\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

- H^2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta$$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \le \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

- H^2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta$$

- H^2 tiene base ortonormal $\left(1, z, z^2, z^3, \ldots\right)$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

- H^2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta$$

- H^2 tiene base ortonormal $\left(1, z, z^2, z^3, \ldots\right)$

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^{\infty} = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f \text{ es analítica y } \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^{∞} es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^{\infty}} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^{∞} es un algebra, y como $\|fg\|_{H^{\infty}} \leq \|f\|_{H^{\infty}} \|g\|_{H^{\infty}}$, H^{∞} es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

- H^2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta$$

- H^2 tiene base ortonormal $\left(1, z, z^2, z^3, \ldots\right)$Note que $H^2 \cong \ell_2$.

Espacios de Hardy (sobre funciones analíticas)

$H^\infty = \{f : D \to \mathbb{C} : \ f$ es analítica y $\sup_{z\in D} |f(z)| < \infty\}$.

- H^∞ es us espacio de Banach con la norma $\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in D} |f(z)|$
- H^∞ es un algebra, y como $\|fg\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{H^\infty} \|g\|_{H^\infty}$, H^∞ es un algebra de Banach.

H^2 las $f : D \to \mathbb{C}$ analíticas con $\sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta < \infty$.

- H^2 es us espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta}$$

- H^2 es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(re^{i\theta}\right) \overline{g\left(re^{i\theta}\right)} d\theta$$

- H^2 tiene base ortonormal $\left(1, z, z^2, z^3, \ldots\right)$Note que $H^2 \cong \ell_2$.
- $H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y ademas $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Definition

H^2 es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\left(1, z, z^2, \ldots\right)$.

Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Definition

H^2 es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\left(1, z, z^2, \ldots\right)$.

Definition

H^∞ consiste de las funciones $f \in H^2$ que satisfacen

1. $fH^2 \subset H^2$ (i.e., consideramos $M_f : H^2 \to H^2$ como un multiplicador)
2. $\sup\left\{\|fg\|_{H^2} : g \in H^2, \ \|g\|_2 = 1\right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Definition

H^2 es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\left(1, z, z^2, \ldots\right)$.

Definition

H^∞ consiste de las funciones $f \in H^2$ que satisfacen

1. $fH^2 \subset H^2$ (i.e., consideramos $M_f : H^2 \to H^2$ como un multiplicador)
2. $\sup\left\{\|fg\|_{H^2} : g \in H^2,\ \|g\|_2 = 1\right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

Uno puede demostrar que $\|M_f\| = \|f\|_{H^\infty}$ y esto describe a H^∞ de manera distinta.

Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Definition

H^2 es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\left(1, z, z^2, \ldots\right)$.

Definition

H^∞ consiste de las funciones $f \in H^2$ que satisfacen

1. $fH^2 \subset H^2$ (i.e., consideramos $M_f : H^2 \to H^2$ como un multiplicador)
2. $\sup\left\{\|fg\|_{H^2} : g \in H^2,\ \ \|g\|_2 = 1\right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

Uno puede demostrar que $\|M_f\| = \|f\|_{H^\infty}$ y esto describe a H^∞ de manera distinta.
Entonces H^∞ es una subalgebra de $B\left(H^2\right)$, y es un algebra de operadores

Teorema de interpolación de Caratheodory

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y acotada

$J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}.$

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada

$J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$. Es un ideal cerrado de H^∞

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada

$J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$. Es un ideal cerrado de H^∞

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty}$$

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada

$J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$. Es un ideal cerrado de H^∞

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty} = \|p + J\|_{H^\infty / J}$$

Teorema de interpolación de Caratheodory

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f(z) = \underbrace{a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n}_{p(z)} + b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots$
- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada

$J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$. Es un ideal cerrado de H^∞

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty} = \|p + J\|_{H^\infty / J}$$

Como $J + span\left\{1, z, z^2, \ldots, z^n\right\} = H^\infty$,

$$\dim H^\infty / J = n + 1$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$. J es un ideal cerrado de H^∞

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$. J es un ideal cerrado de H^∞
Sea $p(z)$ un polinomio que satisface $p(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$ (interpolación de Lagrange)

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty}$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$. J es un ideal cerrado de H^∞

Sea $p(z)$ un polinomio que satisface $p(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$ (interpolación de Lagrange)

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty} = \|p + J\|_{H^\infty / J}$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$ y $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$,

$$\inf \|f\|_{H^\infty}$$

- $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica y acotada
- $f(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$. J es un ideal cerrado de H^∞
Sea $p(z)$ un polinomio que satisface $p(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$ (interpolación de Lagrange)

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty} = \|p + J\|_{H^\infty / J}$$

Y también tenemos que

$$\dim H^\infty / J < \infty$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda (f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda (f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2, \; f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda\left(f\right) = f\left(\lambda\right)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda\left(f\right) = f\left(\lambda\right)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f\left(\lambda\right) = \left\langle f, k_\lambda \right\rangle.$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua
La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda\left(f\right) = f\left(\lambda\right)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda\left(f\right) = f\left(\lambda\right)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f\left(\lambda\right) = \left\langle f, k_\lambda \right\rangle.$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $\left(M_f\right)^* k_\lambda = \overline{f\left(\lambda\right)} k_\lambda$.

Proof.

$$\left\langle g, \left(M_f\right)^* k_\lambda \right\rangle$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Proof.

$$\left\langle g, (M_f)^* k_\lambda \right\rangle = \left\langle M_f g, k_\lambda \right\rangle$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Proof.

$$\left\langle g, (M_f)^* k_\lambda \right\rangle = \langle M_f g, k_\lambda \rangle = \langle fg, k_\lambda \rangle$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Proof.

$$\left\langle g, (M_f)^* k_\lambda \right\rangle = \langle M_f g, k_\lambda \rangle = \langle fg, k_\lambda \rangle = f(\lambda) g(\lambda)$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Proof.

$$\begin{aligned}\left\langle g, (M_f)^* k_\lambda \right\rangle &= \langle M_f g, k_\lambda \rangle = \langle fg, k_\lambda \rangle = f(\lambda) g(\lambda) \\ &= f(\lambda) \langle g, k_\lambda \rangle\end{aligned}$$

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Para $\lambda \in D$, definamos $e_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C}$ por la formula $e_\lambda(f) = f(\lambda)$. Esta función es lineal y continua

La función $e_\lambda : H^2 \to \mathbb{C}$, $e_\lambda(f) = f(\lambda)$, también es lineal y continua. Por consiguiente, existe $k_\lambda \in H^2$ tal que

$$\forall f \in H^2,\ f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle .$$

Es facil ver que $k_\lambda = 1 + \overline{\lambda} z + \overline{\lambda}^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z} \in H^2$.

Lemma

Para $f \in H^\infty$, $\lambda \in D$, $(M_f)^* k_\lambda = \overline{f(\lambda)} k_\lambda$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\left\langle g, (M_f)^* k_\lambda \right\rangle &= \langle M_f g, k_\lambda \rangle = \langle fg, k_\lambda \rangle = f(\lambda) g(\lambda) \\
&= f(\lambda) \langle g, k_\lambda \rangle = \left\langle g, \overline{f(\lambda)} k_\lambda \right\rangle
\end{aligned}$$

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Definition

$\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y $\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$.

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Definition

$\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y $\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$.

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Definition

$\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y $\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$.

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)

Teorema de interpolación de Nevanlinna-Pick

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Definition

$\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y $\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$.

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)

Dados $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$
$J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ es el ideal cerrado de H^∞

Definition

$\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y $\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$.

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)

Lemma

$\mathcal{N}_J = span\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, \ldots, k_{\lambda_n}\}$

Teorema de Sarason (1968)

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $H^2 = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{N}_J$

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $H^2 = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{N}_J$

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $H^2 = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{N}_J$

Sea $f \in H^\infty$,

$$M_f = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \\ P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \end{bmatrix}$$

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $H^2 = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{N}_J$

Sea $f \in H^\infty$,

$$M_f = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \\ P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \\ 0 & P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \end{bmatrix}$$

Teorema de Sarason (1968)

Sea $J \subset H^\infty$ un ideal w^*-cerrado, $\mathcal{M}_J = \overline{JH^2}$ y
$\mathcal{N}_J = (\mathcal{M}_J)^\perp = H^2 \ominus \mathcal{M}_J$

- $\mathcal{M}_J$ es un espacio invariante de H^∞ (i.e., $M_z \mathcal{M}_J \subset \mathcal{M}_J$)
- $\mathcal{N}_J$ es un espacio $*$-invariante de H^∞ (i.e., $(M_z)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $H^2 = \mathcal{M}_J \oplus \mathcal{N}_J$

Sea $f \in H^\infty$,

$$M_f = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \\ P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{M}_J} & P_{\mathcal{M}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \\ 0 & P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J} \end{bmatrix}$$

Definition

$\Phi : H^\infty \to B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \longrightarrow B\left(\mathcal{N}_J\right)$ esta definido por $\Phi\left(f\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \to B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$)

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \to B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \le 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$)
  - (se sigue de $(M_f)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)

Definition

$\Phi : H^{\infty} \to B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$)
    - (se sigue de $(M_f)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi(f) = 0$

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \to B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$)
  - (se sigue de $(M_f)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi(f) = 0$
  - Si $f \in J$, $f\mathcal{N}_J \subset \mathcal{M}_J$.

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \longrightarrow B\left(\mathcal{N}_J\right)$ esta definido por $\Phi\left(f\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi\left(fg\right) = \Phi\left(f\right)\Phi\left(g\right)$)
  - (se sigue de $\left(M_f\right)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi\left(f\right) = 0$
  - Si $f \in J$, $f\mathcal{N}_J \subset \mathcal{M}_J$.

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \longrightarrow B\left(\mathcal{N}_J\right)$ esta definido por $\Phi\left(f\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi\left(fg\right) = \Phi\left(f\right)\Phi\left(g\right)$)
    - (se sigue de $\left(M_f\right)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi\left(f\right) = 0$
    - Si $f \in J$, $f\mathcal{N}_J \subset \mathcal{M}_J$. Y como $P_{\mathcal{N}_J}\left(\mathcal{M}_J\right) = 0$, se sigue que $\Phi\left(f\right) = 0$.

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^{\infty} \longrightarrow B\left(\mathcal{N}_J\right)$ esta definido por $\Phi\left(f\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi\left(fg\right) = \Phi\left(f\right)\Phi\left(g\right)$)
  - (se sigue de $\left(M_f\right)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi\left(f\right) = 0$
  - Si $f \in J$, $f\mathcal{N}_J \subset \mathcal{M}_J$. Y como $P_{\mathcal{N}_J}\left(\mathcal{M}_J\right) = 0$, se sigue que $\Phi\left(f\right) = 0$.

Lemma

$\Phi : H^{\infty}/J \rightarrow B\left(\mathcal{N}_J\right)$ *definido por* $\Phi\left(f + J\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$ *satisface* $\|\Phi\| \leq 1$.

Teorema de Sarason (1968)

Definition

$\Phi : H^\infty \longrightarrow B(\mathcal{N}_J)$ esta definido por $\Phi(f) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$

- Φ es lineal y acotada. $\|\Phi\| \leq 1$.
- Φ es multiplicativa (i.e., $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$)
  - (se sigue de $(M_f)^* \mathcal{N}_J \subset \mathcal{N}_J$)
- $\forall f \in J$, $\Phi(f) = 0$
  - Si $f \in J$, $f\mathcal{N}_J \subset \mathcal{M}_J$. Y como $P_{\mathcal{N}_J}(\mathcal{M}_J) = 0$, se sigue que $\Phi(f) = 0$.

Lemma

$\Phi : H^\infty / J \rightarrow B(\mathcal{N}_J)$ definido por $\Phi(f + J) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$ satisface $\|\Phi\| \leq 1$.

Theorem (Sarason, 1968)

Φ es una isometría.

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ *es una isometría.*

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ *es una isometría.*

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span \left\{ 1, z, \ldots, z^n \right\}$.

Theorem (Sarason, 1968)

Φ es una isometría.

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^{\infty} : f\left(z\right) = b_{n+1}z^{n+1} + b_{n+2}z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{1, z, \ldots, z^n\right\}$.

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p\left(z\right) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ *es una isometría.*

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^{\infty} : f\left(z\right) = b_{n+1}z^{n+1} + b_{n+2}z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{1, z, \ldots, z^n\right\}$.

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p\left(z\right) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

$$\inf_{g \in J} \left\| p + g \right\|_{H^{\infty}} = \left\| p + J \right\|_{H^{\infty}/J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ es una isometría.

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^\infty : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span \{1, z, \ldots, z^n\}$.

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^\infty} = \|p + J\|_{H^\infty / J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Nevanlinna-Pick: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$, $J = \{f \in H^\infty : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n\}$ y $\mathcal{N}_J = span \{z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_n}\}$.

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ es una isometría.

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^{\infty} : f\left(z\right) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{1, z, \ldots, z^n\right\}$.
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p\left(z\right) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

$$\inf_{g \in J} \left\| p + g \right\|_{H^{\infty}} = \left\| p + J \right\|_{H^{\infty}/J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Nevanlinna-Pick: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$, $J = \left\{ f \in H^{\infty} : f\left(\lambda_i\right) = 0 \text{ para } i \leq n \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{ z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_n} \right\}$.
Dados μ_i, $i \leq n$, encontrar $p\left(z\right)$ un polinomio que satisface $p\left(\lambda_i\right) = \mu_i$ para $i \leq n$

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ *es una isometría.*

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^{\infty} : f(z) = b_{n+1} z^{n+1} + b_{n+2} z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{1, z, \ldots, z^n\right\}$.
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

$$\inf_{g \in J} \|p + g\|_{H^{\infty}} = \|p + J\|_{H^{\infty}/J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Nevanlinna-Pick: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$, $J = \{ f \in H^{\infty} : f(\lambda_i) = 0 \text{ para } i \leq n \}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{ z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_n} \right\}$.
Dados μ_i, $i \leq n$, encontrar $p(z)$ un polinomio que satisface $p(\lambda_i) = \mu_i$ para $i \leq n$

$$\inf_{g \in H^{\infty}} \|p + g\|_{H^{\infty}} = \|p + J\|_{H^{\infty}/J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Teorema de Sarason (1968)

Theorem (Sarason, 1968)

Φ *es una isometría.*

Caratheodory: $J = \left\{ f \in H^\infty : f\left(z\right) = b_{n+1}z^{n+1} + b_{n+2}z^{n+2} + \cdots \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{1, z, \ldots, z^n\right\}$.
$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ and $p\left(z\right) = a_0 + a_1 z + \cdots a_n z^n$

$$\inf_{g \in J} \left\| p + g \right\|_{H^\infty} = \left\| p + J \right\|_{H^\infty / J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Nevanlinna-Pick: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in D$, $J = \left\{ f \in H^\infty : f\left(\lambda_i\right) = 0 \text{ para } i \leq n \right\}$ y $\mathcal{N}_J = span\left\{ z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_n} \right\}$.
Dados μ_i, $i \leq n$, encontrar $p\left(z\right)$ un polinomio que satisface $p\left(\lambda_i\right) = \mu_i$ para $i \leq n$

$$\inf_{g \in H^\infty} \left\| p + g \right\|_{H^\infty} = \left\| p + J \right\|_{H^\infty / J} = \left\| P_{\mathcal{N}_J} M_{p|\mathcal{N}_J} \right\|$$

Recordatorio: Espacios de Hardy (definición alterna)

$H^\infty \subset H^2$ como conjuntos, y además $H^\infty H^2 \subset H^2$.

Definition

H^2 es el espacio de Hilbert con base ortonormal $\left(1, z, z^2, \ldots\right)$.

Definition

H^∞ consiste de las funciones $f \in H^2$ que satisfacen

1. $fH^2 \subset H^2$ (i.e., consideramos $M_f : H^2 \to H^2$ como un multiplicador)
2. $\sup\left\{\|fg\|_{H^2} : g \in H^2,\ \|g\|_2 = 1\right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

$$\|f\|_{H^\infty} = \|f\|_\infty = \|M_f\| = \sup\left\{\|fg\|_{H^2} : g \in H^2,\ \|g\|_2 = 1\right\}$$

H^∞ es una subalgebra de $B\left(H^2\right)$

Espacios de Hardy no comutativos

El espacio de Fock completo (Full Fock space) en el espacio de Hilbert ℓ_2^n se define como:

$$F_n^2 = \mathbb{C} \oplus \ell_2^n \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus \cdots$$

Espacios de Hardy no comutativos

El espacio de Fock completo (Full Fock space) en el espacio de Hilbert ℓ_2^n se define como:

$$F_n^2 = \mathbb{C} \oplus \ell_2^n \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus \cdots$$

Es el espacio de Hilbert con base ortonormal indexada por $\mathbb{F}_n^+$, el semigrupo libre de n elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

El espacio de Fock completo (Full Fock space) en el espacio de Hilbert ℓ_2^n se define como:

$$F_n^2 = \mathbb{C} \oplus \ell_2^n \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus \cdots$$

Es el espacio de Hilbert con base ortonormal indexada por $\mathbb{F}_n^+$, el semigrupo libre de n elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

Por ejemplo, si $n = 2$, la base de F_n^2 es

$$e_\Omega, e_{g_1}, e_{g_2}, e_{g_1 g_1}, e_{g_1 g_2}, e_{g_2 g_1}, e_{g_2 g_2}, \ldots$$

Espacios de Hardy no comutativos

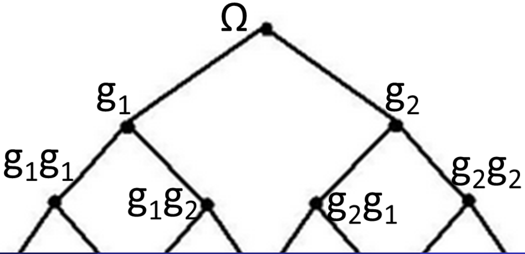
El espacio de Fock completo (Full Fock space) en el espacio de Hilbert ℓ_2^n se define como:

$$F_n^2 = \mathbb{C} \oplus \ell_2^n \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus (\ell_2^n \otimes \ell_2^n \otimes \ell_2^n) \oplus \cdots$$

Es el espacio de Hilbert con base ortonormal indexada por $\mathbb{F}_n^+$, el semigrupo libre de n elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$.
Por ejemplo, si $n = 2$, la base de F_n^2 es

$$e_\Omega, e_{g_1}, e_{g_2}, e_{g_1 g_1}, e_{g_1 g_2}, e_{g_2 g_1}, e_{g_2 g_2}, \ldots$$

y se puede visualizar en el árbol binario



Espacios de Hardy no comutativos

F_n^2 tiene un producto “formal” definido por $e_\alpha \otimes e_\beta = e_{\alpha\beta}$

Espacios de Hardy no comutativos

F_n^2 tiene un producto "formal" definido por $e_\alpha \otimes e_\beta = e_{\alpha\beta}$

Definition

F_n^∞ consiste de las funciones $f \in F_n^2$ que satisfacen

1. $f \otimes F_n^2 \subset F_n^2$ (i.e., consideramos $M_f : F_n^2 \to F_n^2$ como un multiplicador)

F_n^2 tiene un producto "formal" definido por $e_\alpha \otimes e_\beta = e_{\alpha\beta}$

Definition

F_n^∞ consiste de las funciones $f \in F_n^2$ que satisfacen

1. $f \otimes F_n^2 \subset F_n^2$ (i.e., consideramos $M_f : F_n^2 \to F_n^2$ como un multiplicador)
2. $\sup \left\{ \|f \otimes g\|_{H^2} : g \in F_n^2, \;\; \|g\|_2 = 1 \right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

Espacios de Hardy no comutativos

F_n^2 tiene un producto "formal" definido por $e_\alpha \otimes e_\beta = e_{\alpha\beta}$

Definition

F_n^∞ consiste de las funciones $f \in F_n^2$ que satisfacen

1. $f \otimes F_n^2 \subset F_n^2$ (i.e., consideramos $M_f : F_n^2 \to F_n^2$ como un multiplicador)
2. $\sup \left\{ \|f \otimes g\|_{H^2} : g \in F_n^2,\ \ \|g\|_2 = 1 \right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

F_n^∞ es una subalgebra de $B\left(F_n^2\right)$ con la norma

$$\|f\|_{F_n^\infty} = \|f\|_\infty = \sup \left\{ \|f \otimes g\|_{F_n^2} : g \in F_n^2, \|g\|_{F_n^2} = 1 \right\}.$$

F_n^2 tiene un producto "formal" definido por $e_\alpha \otimes e_\beta = e_{\alpha\beta}$

Definition

F_n^∞ consiste de las funciones $f \in F_n^2$ que satisfacen

1. $f \otimes F_n^2 \subset F_n^2$ (i.e., consideramos $M_f : F_n^2 \to F_n^2$ como un multiplicador)
2. $\sup \left\{ \|f \otimes g\|_{H^2} : g \in F_n^2, \ \|g\|_2 = 1 \right\} < \infty$ (i.e., M_f es un operador acotado)

F_n^∞ es una subalgebra de $B\left(F_n^2\right)$ con la norma

$$\|f\|_{F_n^\infty} = \|f\|_\infty = \sup \left\{ \|f \otimes g\|_{F_n^2} : g \in F_n^2, \|g\|_{F_n^2} = 1 \right\}.$$

F_n^∞ está generada (en la topología w^*) por las isometrías (con rangos ortogonales) $S_1, \ldots, S_n : F_n^2 \to F_n^2$ definidas por

$$S_i\left(e_\alpha\right) = e_{g_i\alpha}$$

Espacios de Hardy no comutativos

Hay muchas analogías entre los espacios H^2, H^∞ y F_n^2, F_n^∞ (Popescu)

- factorizacion de funciones inner-outer

Espacios de Hardy no comutativos

Hay muchas analogías entre los espacios H^2, H^∞ y F_n^2, F_n^∞ (Popescu)

- factorizacion de funciones inner-outer
- desigualdad de von Neumann no commutativa

Hay muchas analogías entre los espacios H^2, H^∞ y F_n^2, F_n^∞ (Popescu)

- factorizacion de funciones inner-outer
- desigualdad de von Neumann no commutativa

Espacios de Hardy no comutativos

Hay muchas analogías entre los espacios H^2, H^∞ y F_n^2, F_n^∞ (Popescu)

- factorizacion de funciones inner-outer
- desigualdad de von Neumann no commutativa

Theorem (A-Popescu y Davidson-Pitts, 98)

Si $J \subset F_n^\infty$ es un ideal w^*-cerrado (2-sided), entonces la funcion

$$\Phi : F_n^\infty / J \to B\left(\mathcal{N}_J\right) \text{ definido por } \Phi\left(f\right) = P_{\mathcal{N}_J} M_{f|\mathcal{N}_J}$$

es una isometría.